UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 00182570 2

Handle with
EXTREME CARE
This volume is damaged or brittle and CANNOT be repaired!
• photocopy only if necessary
• return to staff
• do not put in bookdrop
Gerstein Science Information Centre

ERSITY
OF
ONTO
RARY

ELEMENTARMATHEMATIK

VOM HÖHEREN STANDPUNKTE AUS.

TEIL II: GEOMETRIE.

VORLESUNG

GEHALTEN IM SOMMERSEMESTER 1908

VON

F. KLEIN.

AUSGEARBEITET VON E. HELLINGER.

102661
32/6/10

LEIPZIG 1909.

IN KOMMISSION BEI B. G. TEUBNER.

QA
39
K54
T.2

Vorwort.

In dem Vorwort zu Teil I der vorliegenden Vorlesungen (Arithmetik, Algebra, Analysis) bezeichnete ich es noch als zweifelhaft, ob der der Geometrie gewidmete Teil II so bald werde erscheinen können. Nun ist es doch gelungen, ihn fertig zu stellen, wozu die Arbeitskraft von Herrn Hellinger, wie ich gern hervorhebe, ihr wesentliches Teil beigetragen hat.

Über Entstehung und Zweck der ganzen Vorlesungsserie habe ich hier dem, was in der Vorrede von I gesagt ist, nichts Besonderes mehr hinzuzufügen. Wohl aber scheint ein Wort nötig über die neue Form, welche dieser zweite Teil angenommen hat.

Diese Form ist in der Tat eine ganz andere wie bei Teil I. Ich habe mich entschlossen, vor allen Dingen einen Gesamtüberblick über das Gebiet der Geometrie zu geben, in dem Umfange, wie ich ihn jedem Lehrer an einer höheren Schule wünschen möchte*); die Erörterungen über den geometrischen Unterricht wurden also zurückgedrängt und zum Schluß, soweit noch Raum blieb, nun aber im Zusammenhange, gegeben.

In einem gewissen Maße hat bei der so charakterisierten Neuanordnung der Wunsch mitgewirkt, nicht in eine zu stereotype Form zu verfallen. Es lassen sich aber auch wichtige innere Gründe anführen. Wir haben in der Geometrie keine solchen einheitlichen, dem allgemeinen Stande der Wissenschaft entsprechenden Lehrbücher, wie wir sie für Algebra und Analysis dank dem Vorbilde der französischen Cours besitzen; vielmehr findet man hier diese, dort jene einzelne Seite des vielumfassenden Gegenstandes dargestellt, wie sie gerade von der einen oder anderen Gruppe von Forschern zur Entwicklung gebracht worden ist. Demgegenüber schien es, bei den pädagogischen und allgemein-wissenschaftlichen Zwecken, die ich verfolge, ein wesentliches Erfordernis, eine mehr einheitliche Zusammenfassung zu versuchen.

Ich schließe mit dem Wunsche, daß die beiden einander ergänzenden nun vollendet vorliegenden Teile der „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus“ in der Lehrerwelt dieselbe freundliche Aufmerksamkeit finden mögen, wie die im Vorjahre von Herrn Schimmack und mir herausgegebenen Vorträge über die Organisation des mathematischen Unterrichts.

Göttingen, Weihnachten 1908. **Klein.**

*) Wer sich für abstraktere Fragen interessiert, sei auf meine schon früher autographierten Vorlesungen über „höhere Geometrie“ verwiesen (1893, neuer Abdruck 1907).

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Seite

Zweck und Form der Vorlesung 1
Die „Fusionsbestrebungen“ 4

Erster Hauptteil: Die einfachsten geometrischen Gebilde.

I. Strecke, Flächeninhalt und Rauminhalt als relative Größen . . 5
Definition durch Determinanten; Deutung der Vorzeichen 6
Einfachste Anwendungen (Doppelverhältnis) 11
Inhalt geradliniger Polygone 14
Krummlinig begrenzte Flächenstücke 19
Theorie des Amslerschen Polarplanimeters 22
Inhalte von Polyedern; Kantengesetz und einseitige Polyeder von Moebius 33

II. Das Graßmannsche Determinantenprinzip für die Ebene . . . 42
Linienteile (Vektoren) 43
Anwendung in der Statik starrer Systeme 45
Klassifikation geometrischer Größen nach ihrem Verhalten bei Transformation der rechtwinkligen Koordinaten 50
Anwendung dieses Prinzips auf unsere Elementargrößen 52
Speziell: Äquivalenz von Kräftepaar und Dreiecksinhalt 55

III. Das Graßmannsche Prinzip für den Raum 58
Linien- und Ebenenteil 59
Anwendung in der Statik starrer Körper 62
Dyname am starren Körper und Nullsystem 67
Geometrische Veranschaulichung des Nullsystems 71
Zusammenhang mit der Schraubentheorie 76

Seite

IV. Weitere Klassifikation der einfachsten Raumgrößen nach ihrem Verhalten bei rechtwinkligen Koordinatentransformationen . . . 80

Allgemeines über orthogonale Transformation der rechtwinkligen Parallelkoordinaten 80
Ableitung einiger Transformationsformeln 87
Kräftepaar und freie Plangröße als äquivalente Gebilde 91
Freier Linienteil und freie Plangröße („polarer" und „axialer" Vektor) 94
Skalare erster und zweiter Art 98
Grundzüge einer rationellen Vektoralgebra 100

V. Erzeugnisse der somit eingeführten Grundgebilde 107

Erzeugnisse von Punkten (Kurven, Flächen, Punktmengen) 108
Vom Unterschied zwischen analytischer und synthetischer Geometrie 110
Die projektive Geometrie und das Prinzip der Dualität 114
Plückers analytische Auffassung und Weiterbildung des Dualitätsprinzipes (Geradenkoordinaten) 119
Graßmanns Ausdehnungslehre; insbesondere mehrdimensionale Geometrie 124
Skalar- und Vektorfelder; rationelle Vektoranalysis 130

Zweiter Hauptteil: Die geometrischen Transformationen.

Allgemeines über Transformationen und ihre analytische Darstellung 139

I. Affine Transformationen 142

Analytische Definition und Grundeigenschaften 142
Geometrische Charakterisierung der Transformation 148
Anwendung auf die Theorie des Ellipsoids 153
Parallelprojektion einer Ebene in eine andere 157
Axonometrische Abbildung des Raumes (Affinität mit verschwindender Determinante) 161
Der Fundamentalsatz von Pohlke 169

II. Projektive Transformationen 175

Analytische Definition; Einführung homogener Koordinaten 175
Geometrische Definition: Jede Kollineation ist eine Projektivität 182
Verhalten der Grundgebilde bei Projektivitäten 187
Zentralprojektion des Raumes in eine Ebene (Projektivität mit verschwindender Determinante) 194
Reliefperspektive 195
Anwendung des Projizierens zur Ableitung von Kegelschnitteigenschaften 199

Seite

III. Höhere Punkttransformationen 202

1. Transformation durch reziproke Radien 203
Die Peaucelliersche Geradführung 208
Stereographische Projektion der Kugel 210
2. Einige allgemeinere Kartenprojektionen 212
Die Merkatorprojektion 213
Die Tissotschen Sätze 215
3. Die allgemeinsten eineindeutigen stetigen Punkttransformationen 218
Begriff der „Analysis situs“ 219
Geschlecht und Zusammenhang von Flächen 221
Der Eulersche Polyedersatz 224

IV. Transformationen mit Wechsel des Raumelementes 225

1. Die dualistischen Transformationen 225
2. Berührungstransformationen 230
3. Beispiele 235
Gestalt algebraischer Ordnungs- und Klassenkurven 236
Anwendung der Berührungstransformationen auf Zahnradtheorie 238

V. Anhang: Die Imaginärtheorie 242

Anlaß und Zweck der Einführung imaginärer Elemente 242
Die imaginären Kreispunkte und der imaginäre Kugelkreis 246
Imaginärtransformation 249
v. Staudts Deutung sich selbst konjugierter imaginärer Gebilde durch reelle Polarsysteme 251
v. Staudts volle Deutung einzelner imaginärer Elemente 258
Beispiele und weitere Ausführungen hierzu 266

Dritter Hauptteil: Systematik und Grundlegung der Geometrie.

I. Systematik 271

1. Überblick über die Gliederung der Geometrie 272
Die Gruppentheorie als geometrisches Einteilungsprinzip 272
Cayleys Grundsatz: projective geometry is all geometry 281
2. Exkurs über Invariantentheorie der linearen Substitutionen 282
Die Systematik der Invariantentheorie 284
Erläuterung an einfachen Beispielen 293
3. Anwendung der Invariantentheorie auf Geometrie 301
Deutung der Invariantentheorie von $n+1$ Variablen in der affinen Geometrie des R_{n+1} mit festem Nullpunkt 301
Ihre Deutung in der projektiven Geometrie des R_n 305
Speziell: Einordnung des Begriffes „Doppelverhältnis“ 307

4. **Die Systematisierung der affinen und metrischen Geometrie auf Grund des Cayleyschen Prinzipes** 340
Einordnung der Grundbegriffe der affinen Geometrie in das projektive System . 343
Einordnung der Grundbegriffe der metrischen Geometrie in das projektive System 347
Speziell: projektive Behandlung der Dreiecksgeometrie 321

II. Grundlegung der Geometrie 323

Allgemeine Fragestellung; Stellungnahme zur analytischen Geometrie. . . . 324
Andeutung über den Aufbau der reinen projektiven Geometrie mit nachträglichem Anschluß der metrischen 325

1. **Aufbau der ebenen Geometrie unter Voranstellung der Bewegungsgruppe** 329
Aufbau der affinen Geometrie aus den Parallelverschiebungen 331
Heranahme der Drehungen zum Aufbau der metrischen Geometrie 340
Endgültige Herstellung der Ausdrücke für Entfernung und Winkel 349
Einordnung der Allgemeinbegriffe Flächeninhalt und Kurvenlänge 351

2. **Eine zweite Art der Grundlegung der Geometrie** 356
Entfernung, Winkel, Kongruenz als Grundbegriffe 357
Parallelenaxiom und Parallelentheorie nichteuklidische Geometrie 359
Bedeutung der nichteuklidischen Geometrie nach philosophischer Seite 364
Einordnung der nichteuklidischen Geometrie in das projektive System 368
Allgemeines über moderne geometrische Axiomatik 379

3. **Euklids Elemente** 385
Kritisches über die geschichtliche Stellung und wissenschaftliche Bedeutung der Elemente 387
Inhalt der 13 Bücher Euklids 395
Die Grundlegung der Geometrie bei Euklid. 403
Definitionen, Postulate, Axiome 406
Der Anfang des ersten Buches 413
Das Fehlen der „Zwischenaxiome“ bei Euklid; die Möglichkeit der sog. geometrischen Sophismen 417
Das „Archimedische Axiom“ bei Euklid; Exkurs über die „hornförmigen Winkel“ als Beispiel eines dadurch ausgeschlossenen Größensystems 423

Anhang: Vom Unterricht in der Geometrie nach seiner Entwicklung in den verschiedenen Ländern.

Bedeutung des historischen Untergrundes 433
Entgegenstellung moderner Anforderungen 435
Kritisches zum heutigen Unterrichtsbetriebe 438

Seite

I. Der Unterricht in England 444

Der allgemeine historische Typus des Unterrichts und der Examina 444
Die Association for the improvement of geometrical teaching 448
Perry und seine Tendenzen 450
Einige moderne Bücher 455

II. Der Unterricht in Frankreich 456

Petrus Ramus und Clairaut 458
Legendres Elemente und ihre Bedeutung 461
Exkurs über Legendres Parallelentheorie 465
Legendres Nachfolger 470
Die Unterrichtsreform von 1902 472
Die Einwirkung von Mérays „nouveaux éléments“ 475

III. Der Unterricht in Italien 477

Der Einfluß Cremonas 478
Ältere geometrische Lehrbücher 480
Neuere Forderungen erhöhter Strenge: Veronese 482
Die Peanosche Schule 484
Moderne Reformbestrebungen 487

IV. Der Unterricht in Deutschland 488

Der Einfluß des Volksschulunterrichtes (Pestalozzi und Herbart) 489
Der österreichische Lehrplan von Exner und Bonitz (1849): selbständige Pflege der Raumanschauung 492
Übertragung dieser Tendenzen nach Norddeutschland; Holzmüllers Bücher 494
Anregungen seitens der experimentellen Psychologie 497
Verhältnis zur modernen Kunsterziehung 501
Schopenhauers Kritik der Mathematik; Exkurs über die Beweise des Pythagoreischen Satzes 503
Neuere Einwirkungen seitens der Hochschule 508
Der österreichische Lehrplan von 1900 und das Werk von Henrici und Treutlein . . 511

Einleitung.

Meine Herren! Die Vorlesung, die ich heute beginne, soll die unmittelbare Fortsetzung und Ergänzung meines Kollegs vom letzten Winter [1] bilden. Hier wie dort ist die Absicht, alles, was Sie in Ihren Studienjahren an Mathematik getrieben haben, soweit es für den künftigen Lehrer nur irgend von Interesse sein kann, zusammenzufassen, und insbesondere auch in seiner Tragweite für den Betrieb des mathematischen Schulunterrichts zu erläutern. Im Winter habe ich dieses Programm der Reihe nach für die *Arithmetik, Algebra, Analysis* durchgeführt, im laufenden Semester soll nun die *Geometrie* zu Ehren kommen, die damals beiseite geblieben war. Dabei sollen unsere Betrachtungen natürlich auch unabhängig vom vorigen Kolleg verständlich sein, und ich will übrigens auch den Ton des Ganzen ein wenig anders nehmen: Im Vordergrund soll das – ich will einmal sagen – *enzyklopädische Moment* stehen, die sol-

1) Erschienen als Teil I dieser autographierten Vorlesungen über „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus". Leipzig 1908 (im Kommission bei B. G. Teubner – Zitiert als „Teil I".

den einen Ueberblick über das Gesamtgebiet der Geometrie erhalten, der Sie befähigt, alle Einzelkenntnisse, die Sie im Laufe Ihres Studiums gewonnen haben, wie in einen festen Rahmen einzuordnen, und so zu jeder Anwendung bereit zu halten; erst hinterher wird ganz von selbst dann auch das Interesse am mathematischen Schulunterricht hervorkommen, von dem ich im Winter immer ausging.

Ich nehme hier noch gern Bezug darauf, daß soeben in den vergangenen Osterferien hier in Göttingen ein Ferienkursus für Oberlehrer der Mathematik und Physik stattgefunden hat; dort habe ich über meine Wintervorlesung berichtet, und im Anschluss daran sowie an den Vortrag von Professor Behrendsen vom hiesigen Gymnasium haben sehr interessante angeregte Diskussionen stattgefunden über die Frage der Modernisierung des Schulunterrichts in Arithmetik, Algebra und Analysis sowie speziell der Einführung der Differential- und Integralrechnung auf der Schule.[1] Es zeigte sich dabei bei den Teilnehmern ein äußerst erfreuliches Interesse an diesen Fragen, wie überhaupt an unseren Bestrebungen, Universität und Schule in lebendigen Kontakt zu bringen. Ich hoffe, dass auch meine gegenwärtige Vorlesung im Sinne dieser

1.) Vgl. das freie Referat von R. Schimmack „Ueber die Gestaltung des mathematischen Unterrichts im Sinne der neueren Reformideen" in der Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht 39 (1908) pag. 513-527.

Tendenz liegt, dass sie ein Stück beiträgt zur Abstellung der alten Klagen, die wir - bisher leider oft mit Recht - von der Schule her immer hören müssen: Der Hochschulunterricht bringe zwar vieles Spezielle, aber er lasse den angehenden Lehrer durchaus unorientiert über die vielen allgemeinen wichtigen Dinge, die er später tatsächlich brauchen könnte.

Was nun den Stoff der Vorlesung anlangt, so bemerke ich nur, dass ich ganz wie im vorigen Semester gelegentlich Hauptsätze aus allen Gebieten der Geometrie, so wie sie Ihnen sonst vorgetragen werden, als bekannt werde voraussetzen müssen, um den Nachdruck auf den Überblick über das Ganze legen zu können; dabei werde ich freilich Ihrer Erinnerung immer soweit durch kurze Angaben nachzuhelfen suchen, dass Sie sich in der Literatur leicht vollständig orientieren können. Demgegenüber will ich - gleichfalls ganz wie im ersten Teil - viel mehr als es sonst geschieht, auf die historische Entwicklung der Wissenschaft, auf die Leistungen ihrer großen Pfadfinder, hinweisen. Durch Erörterungen dieser Art will ich Ihre, wie ich gerne sage, mathematische Allgemeinbildung fördern: neben die Kenntnis der Details, wie sie die Spezialvorlesungen liefern, soll die Erfassung des sachlichen und historischen Zusammenhanges treten.

Noch eine letzte allgemeine Bemerkung gestatten Sie, um ein Mißverständnis zu vermeiden, wie es die äußere Trennung dieses „geometrischen" Teiles der Vorlesung vom ersten „arithmetischen" sonst vielleicht hervorrufen könnte. Ich vertrete dessen ungeachtet hier wie überhaupt stets in solchen allgemeinen Vorlesungen eine Tendenz, die ich am liebsten mit dem Stichwort „Fusion der Arithmetik und Geometrie" bezeichne – Arithmetik hier im allgemeinen, auf der Schule üblichen Sinne verstanden, wo nicht nur die Lehre von den Zahlen, sondern auch die ganze Algebra und Analysis mit inbegriffen ist. Man gebraucht dies Wort „Fusion" sonst, besonders in Italien, als Schlagwort für Bestrebungen, die sich auf die Geometrie beschränken. Es ist nämlich von altersher auf der Schule wie auf der Universität üblich, erst die Geometrie der Ebene und dann ganz abgesondert davon die des Raumes zu behandeln; dabei kommt die Raumgeometrie aber leider meist zu kurz, und unser edles Organ der Raumanschauung verkümmert. Demgegenüber wollen die „Fusionisten" von vornherein Ebene und Raum gleichzeitig nebeneinander behandeln, um unser Denken nicht erst künstlich auf zwei Dimensionen zu beschränken. Auch diesen Bestrebungen schließe ich mich hier an, denke

aber, wie gesagt, an eine noch weitergehende Fusion: Im vorigen Semester habe ich die abstraktesten Erörterungen der Arithmetik, Algebra und Analysis stets durch Figuren und graphische Methoden belebt, die die Dinge einem viel näher bringen und vielfach erst verständlich machen, warum man sich damit beschäftigt; analog will ich jetzt die Raumanschauung, die natürlich an erster Stelle stehen bleiben muss, von vornherein durch analytische Formeln begleiten, die die praecise Formulierung geometrischer Tatsachen in höchstem Maße erleichtern.

Wie das gemeint ist, werden Sie am besten sehen, wenn ich mich sogleich unserem Gegenstande zuwende; da sollen uns zuerst beschäftigen

Erster Hauptteil: Die einfachsten geometrischen Gebilde,

und zwar werden wir in einem ersten Kapitel behandeln:

I. Strecke, Flächeninhalt, Rauminhalt als relative Größen.

Sie sehen bereits an dieser Kapitelüberschrift, daß ich getreu der soeben allgemein ausgesprochenen Absicht von Anfang an die entsprechenden Größen auf der

Geraden, in der Ebene, im Raum nebeneinander behandele; gleichzeitig wollen wir aber auch bald der allgemeineren Tendenz der Fusion Rechnung tragen, indem wir uns von vornherein prinzipiell des rechtwinkligen Koordinatensystems bedienen.

Haben wir nun zunächst eine Strecke, so denken wir sie auf die x-Achse gelegt; sind die Abszissen ihrer Endpunkte x_1 und x_2, so ist ihre Länge $x_1 - x_2$ und das kann man offenbar als folgende Determinante schreiben:

$$x_1 - x_2 = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix}$$

Ganz analog ist der Inhalt eines Dreiecks der x-y-Ebene, das von den 3 Punkten $(x_1 | y_1)$, $(x_2 | y_2)$, $(x_3 | y_3)$ gebildet wird, gleich:

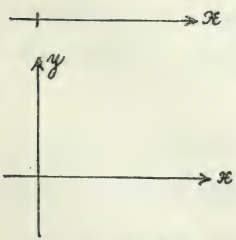
$$\frac{1}{1.2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix};$$

und endlich hat man für den Rauminhalt des Tetraeders, das die 4 Punkte $(x_1 | y_1 | z_1) \ldots (x_4 | y_4 | z_4)$ bilden:

$$\frac{1}{1.2.3} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

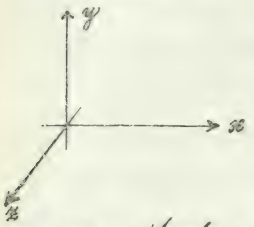
Gewöhnlich sagt man nun, daß die Länge bezw. der Inhalt gleich dem absoluten Werte der angegebenen Größen ist, während doch tatsächlich unsere Formeln noch darüber hinaus ein ganz bestimmtes Vorzeichen liefern, das nur von der Reihenfolge abhängt, in der die Punkte gegeben sind. Wir wollen uns zum Prinzip machen, alle solche Vorzeichen, die die analytischen Formeln liefern, auch in der Geometrie zu verwenden, und haben demgemäß zu fragen, was bei diesen Inhaltsbestimmungen denn das Vorzeichen geometrisch bedeuten mag.

Dafür ist es von Wichtigkeit, wie wir das rechtwinklige Koordinatensystem wählen und darüber wollen wir vorab eine ein für alle Male bindende, an sich natürlich willkürliche Verabredung treffen. In einer Dimension zunächst möge die



x-Achse immer nach rechts hin positiv genommen sein. In der Ebene ferner sei die positive x-Achse nach rechts, die positive y-Achse nach oben gerichtet; würde man diese nach unten hin richten, so ergäbe sich ein wesentlich verschiedenes Koordinatensystem, das zu dem ersten spiegelbildlich ist und das man mit ihm

durch bloße Bewegung in der Ebene, ohne in den Raum hinaus zu gehen, nicht zur Deckung bringen kann. Das räumliche Koordinatensystem möge nun aus jenem ebenen entstehen, indem man eine nach vorn positiv gerichtete z-Achse hinzunimmt; die umgekehrte Richtung ergäbe wieder ein wesentlich verschiedenes Koordinatensystem, das man mit dem unsrigen durch keine Bewegung im Raume zur Deckung bringen könnte. 1)



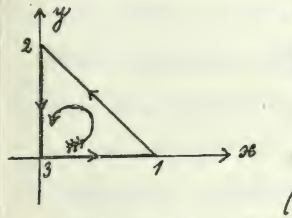
Indem wir immer an diesen Verabredungen festhalten, werden wir nun die Deutung unserer Vorzeichen in einfachen geometrischen Eigenschaften der durch die gegebene Numerierung bedingten Reihenfolge der Punkte finden.

Für die Strecke (1, 2) ist diese Eigenschaft fast selbstverständlich: Sie ist positiv oder negativ zu rechnen, je nachdem der Punkt 1 rechts oder links von 2 liegt.

Beim Dreieck ferner ist das Resultat das: Die Formel liefert für den Inhalt einen positiven oder negativen Wert, je nachdem der Umlaufungssinn, der auf dem

1) Man unterscheidet diese beiden Systeme als „rechtshändiges" und „linkshändiges", da sie der Stellung der ersten 3 Finger an der rechten und linken Hand entsprechen (Vgl. Teil I, pag. 156).

Dreiecksumfange von der Ecke 1 über 2 zu 3 führt, dem Uhrzeigersinne entgegengesetzt oder gleich ist. Wir werden das beweisen, indem wir bei einem möglichst bequem gelegenen speziellen Dreieck die Formel direkt ausrechnen, und nach der Kontinuität auf das allgemeine Dreieck schließen:



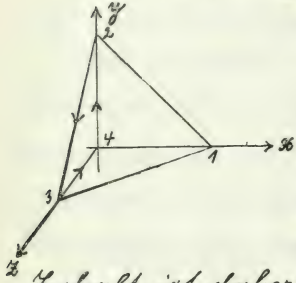
Wir betrachten das Dreieck, das zur ersten Ecke den Einheitspunkt der x-Achse ($x_1 = 1 \mid y_1 = 0$), zur zweiten den der y-Achse ($x_2 = 0 \mid y_2 = 1$), zur dritten den Nullpunkt ($x_3 = y_3 = 0$) hat; es ist nach unseren Verabredungen über das Koordinatensystem entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne umlaufen, und unsere Formel ergibt für seinen Inhalt tatsächlich den positiven Wert:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +\frac{1}{2}$$

Wir können die Ecken dieses Dreiecks nun gewiß in die Ecken jedes andern Dreiecks mit demselben Umlaufungssinn stetig überführen, ohne daß sie dabei jemals alle drei in eine Gerade zu liegen kommen. Dabei ändert sich aber unsere Determinante stetig, und da sie bekanntlich nur verschwindet, wenn die Punkte 1, 2, 3 auf einer Geraden liegen, muß sie bei diesem Prozeß ständig positiv bleiben; damit ist in der Tat bewiesen, daß der

Inhalt jedes positiv umlaufenen Dreiecks positiv ist. Durch Vertauschung zweier Ecken ergibt sich sofort, daß jedes im Uhrzeigersinne umlaufene Dreieck unserer Formel zufolge negativen Inhalt bekommt.

Ganz analog können wir nun das Tetraeder behandeln. Wir geben uns wieder von einem möglichst bequem gelegenen Tetraeder: zur ersten, zweiten, dritten Ecke möge es bezw. den Einheitspunkt der x-, y-, z-Achse, zur vierten den Anfangspunkt haben. Sein



Inhalt ist daher:

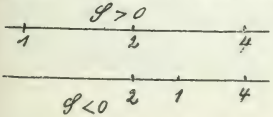
$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +\frac{1}{6},$$

und wie vorhin folgt wieder, daß jedes Tetraeder, das man durch stetige Deformation aus ihm herleiten kann, ohne daß die vier Ecken jemals in eine Ebene fallen (d. h. die Determinante verschwindet), positiven Inhalt besitzt. Alle diese Tetraeder kann man aber durch den Umlaufsinn charakterisieren, den das eine Seitendreieck (2, 3, 4) von der Ecke 1 aus betrachtet aufweist, und so ergibt sich folgendes Resultat: Ein Tetraeder (1, 2, 3, 4) hat positi-

ven Rauminhalt, wenn von der Ecke 1 aus betrachtet, die Ecken 2, 3, 4 entgegen dem Sinne des Uhrzeigers aufeinander folgen; andernfalls hat es negativen Zahlwert.

Wir haben so aus den analytischen Formeln tatsächlich geometrische Regeln gewonnen, die jeder Strecke, jedem Dreieck, jedem Tetraeder ein bestimmtes Vorzeichen zuzuordnen gestatten, wenn die Ecken in einer bestimmten Reihenfolge gegeben sind. Damit sind tatsächlich grosse Vorteile gegenüber der gewöhnlichen Elementargeometrie gewonnen, die Länge und Inhalt als absolute Grössen betrachtet, wir werden nämlich allgemeine einfache Theoreme auch da aufstellen können, wo jene Elementargeometrie je nach dem besonderen Aussehen der Figuren zahlreiche Fälle unterscheiden muss.

Lassen Sie mich mit einem ganz primitiven Beispiele beginnen, dem Schnittverhältnis dreier Punkte auf einer Geraden, der x-Achse. Bezeichnen wir die drei Punkte, wie es in Rücksicht auf das folgende am bequemsten ist, mit 1, 2 und 4, so ist ihr Schnittverhältnis gegeben durch



$$S = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_4}$$

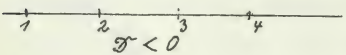
und es ist klar, dass dieses S positiv

oder negativ ist, je nachdem der Punkt 1 außerhalb oder innerhalb der Strecke (2, 4) liegt. Gibt man, wie in den Elementen sonst üblich, nur den absoluten Wert $|\mathfrak{D}| = \frac{|x_1 - x_2|}{|x_1 - x_4|}$, so muß man immer noch ausdrücklich auf die Figur verweisen oder in Worten hinzufügen, ob man einen Punkt innerhalb oder außerhalb im Sinne hat, und das ist natürlich viel umständlicher. Die Einführung des Vorzeichens trägt also den verschiedenen Möglichkeiten der Anordnung der Punkte auf einer Geraden Rechnung – eine Beziehung, auf die wir im Laufe der Vorlesung noch öfters hinzuweisen haben werden.

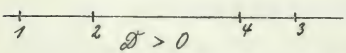
Nehmen wir noch einen vierten Punkt 3 hinzu, so können wir das Doppelschnittverhältnis bilden, das man meist kurz als Doppelverhältnis bezeichnet:

$$\mathfrak{D} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_4} : \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_4} = \frac{(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)}{(x_1 - x_4)(x_3 - x_2)}$$

Diese Formel liefert sofort das Vorzeichen mit, und zwar sieht man unmittelbar, daß $\mathfrak{D} < 0$ ist, wenn die Punktepaare 1 und 3 einerseits und 2, 4 andererseits sich gegenseitig trennen, $\mathfrak{D} > 0$ aber im entgegengesetzten Falle, d. h. wenn 1 und 3 gleichzeitig außerhalb oder innerhalb der Strecke 2, 4 liegen. So gibt es wieder 2

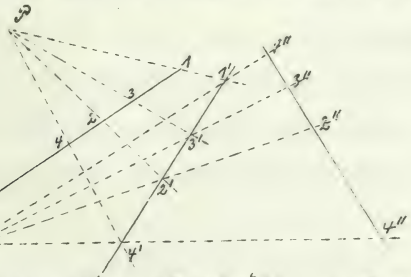


$\mathfrak{D} < 0$



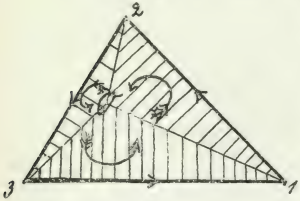
$\mathfrak{D} > 0$

wesentlich verschiedene Arten der Lage, die denselben Absolutwert von D liefern, und wenn man nur diesen gibt, muß man die Lagenbestimmung immer noch ausdrücklich hinzufügen; definiert man z. B. harmonische Punkte durch $|D| = 1$, wie es leider auf der Schule noch meist üblich ist, so muß man unbedingt die Forderung gebrannter Lage der beiden Punktepaare in die Definition aufnehmen, während wir mit der einen Angabe $D = -1$ auskommen. Besonders wichtig ist die Berücksichtigung des Vorzeichens in der projektiven Geometrie, wo das Doppelverhältnis bekanntlich eine maßgebende Rolle spielt. Wie man weiß, gilt da der Satz, daß 4 Punkte einer Geraden dasselbe Doppelverhältnis haben, wie die aus ihnen durch Projektion von einem beliebigen Zentrum aus auf einer anderen Geraden hervorgehenden Punkte. Betrachtet man nun das Doppelverhältnis als relative Größe mit seinem Vorzeichen, so gilt auch die folgende ausnahmslose Umkehrung dieses Satzes: Zwei Punktquadrupel auf zwei Geraden lassen sich stets durch Perspektive oder durch wiederholte Perspektive auseinander ableiten, wenn sie



das gleiche Doppelverhältnis D haben – so zum Beispiel in obiger Figur die Quadrupel 1, 2, 3, 4 und 1″, 2″, 3″, 4″ durch Projektion aus den Zentren P und P′. Kennt man jedoch nur den absoluten Wert von D, so gilt das entsprechende Theorem nicht in dieser einfachen Form, sondern man müßte noch eine besondere Voraussetzung über die Lage der Punkte aufnehmen.

Ein weit ergiebigeres Feld haben wir vor uns, wenn wir zu Anwendungen unserer Dreiecksformel aufsteigen. Legen wir zunächst einmal in das Innere eines Dreiecks (1, 2, 3) irgendwie einen Punkt O, und verbinden ihn mit den drei Ecken, so ist die Summe der in elementarem Sinne als absolute Größen aufgefassten Inhalte der entstehenden Teildreiecke gleich dem Inhalt des Ausgangsdreiecks:



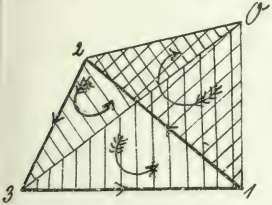
$$|1, 2, 3| = |O, 2, 3| + |O, 3, 1| + |O, 1, 2| .$$

Bei den Verhältnissen der Figur folgen die Ecken in der angegebenen Reihenfolge allemal entgegen dem Uhrzeigersinne aufeinander; die Dreiecksinhalte (1, 2, 3), (O, 2, 3), (O, 3, 1), (O, 1, 2) – im Sinne unserer allgemeinen Definition mit Vorzeichen versehen, – sind

also sämtlich positiv, und wir können unsere Formel auch schreiben:

$$(1,2,3) = (0,2,3) + (0,3,1) + (0,1,2).$$

Ich behaupte aber nun, daß dieselbe Formel auch gilt, wenn 0 außerhalb des Dreiecks liegt, und überhaupt, wenn 0, 1, 2, 3 irgend vier beliebige Punkte der Ebene sind. In der Tat, wenn wir beispielsweise die nebenstehende Lage nehmen, ist (0, 2, 3) und (0, 3, 1) entgegen, (0, 1, 2) aber im Uhrzeigersinne umlaufen, so daß unsere Formel für die absoluten Werte der Inhalte ergeben würde:



$$|1,2,3| = |0,2,3| + |0,3,1| - |0,1,2|;$$

die Richtigkeit dieser Gleichung aber bestätigt die Figur sofort.

Die allgemeine Richtigkeit unserer Behauptung werden wir aus der analytischen Definition herleiten, wobei wir in unserer Formel einen bekannten Satz der Algebra bezw. Determinantenlehre erkennen werden. Wir nehmen der Bequemlichkeit halber – was offenbar keine wesentliche Spezialisation ist – 0 als Koordinatenanfang $x = 0, y = 0$, und tragen für die 4 Dreiecksinhalte die bekr. Determinanten ein; dann wäre also zu beweisen, wenn wir noch überall den Faktor $\frac{1}{2}$ fortlassen, daß für beliebige Werte $x_1 \cdots y_3$:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

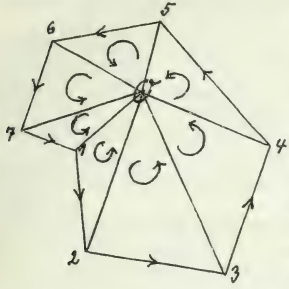
Der Wert jeder Determinante rechts wird nicht geändert, wenn wir die zweite und dritte 1 der letzten Kolonne durch Nullen ersetzen, da diese Elemente bei Entwickelung nach Unterdeterminanten der ersten Zeile nur in die mit Nullen multiplizierten Unterdeterminanten eingehen; vertauschen wir in den beiden letzten Determinanten die Zeilen noch zyklisch, was bei Determinanten dritter und überhaupt ungerader Ordnung ja erlaubt ist, so können wir unsere Gleichung schreiben:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x_3 & y_3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Das ist aber eine identisch richtige Gleichung, da rechts einfach die Unterdeterminanten der letzten Kolonne der linken Determinante stehen, und sonach nur die bekannte Entwickelung dieser Determinante nach Elementen einer Kolonne vorliegt. Damit ist unser Satz mit einem Schlage für alle möglichen Lagen der 4 Punkte bewiesen.

Wir können nun diese Formel sofort so verallgemeinern, daß sie uns den <u>Inhalt beliebiger Polygone</u> gibt. Denken Sie dabei etwa an eine Aufgabe der Geodäsie: Es sei der Flächeninhalt eines Grundstückes mit geradlinigen Seiten zu bestimmen, nachdem man die Koordinaten der Ecken $1, 2, \ldots, n-1, n$ ge-

messen hat. Wer nicht gewohnt ist, mit Vorzeichen zu operieren, der wird sich die Gestalt des Polygons danach skizzieren müssen, es in Dreiecke zerlegen, und nun je nach der besonderen Gestalt, je nachdem was insbesondere für einspringende Winkel vorkommen, den Inhalt als Summe oder Differenz der einzelnen Dreiecksinhalte bestimmen müssen. Wir können nun aber sofort eine allgemeine Formel angeben, die das Richtige ganz mechanisch liefert, ohne einen Blick auf die Figur zu verlangen: Ist O irgend ein Punkt der Ebene, etwa der Koordinatenanfang, so ist der Inhalt unseres Polygons:

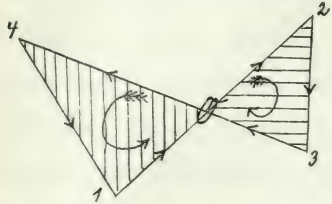


$$P = (O,1,2) + (O,2,3) + \ldots + (O,n-1,n) + (O,n,1),$$

wo die Dreiecke mit dem durch den angegebenen Umlaufssinn bestimmten Vorzeichen zu nehmen sind; die Formel liefert P positiv oder negativ je nachdem der Sinn $1, 2, \ldots n$ das Polygon entgegen oder entsprechend dem Uhrzeigersinn umläuft. Die Angabe dieser Formel mag hier genügen, Sie werden sich den Beweis leicht selbst zurecht legen können.

Ich möchte hier lieber noch auf besonders interessante Fälle eingehen, die beim Feldmessen freilich nicht vorkommen können, nämlich auf Polygone, die sich

selbst überschlagen, wie etwa dieses Viereck. Wollen wir

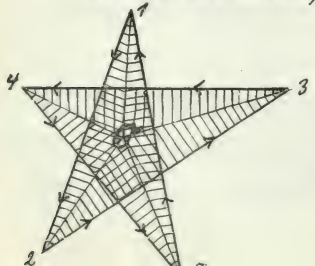


hier überhaupt von einem bestimmten Inhalt reden, so wird es nur der Wert sein können, den unsere Formel liefert; wir haben nur zu überlegen, was dieser Wert geometrisch bedeutet. Zunächst macht man sich leicht klar, daß er selbstverständlich unabhängig von der speziellen Lage von O ist. Legen wir O also möglichst bequem in den Überschlagungspunkt des Vierecks, so werden die Dreiecke (O, 1, 2) und O, 3, 4 Null, und es bleibt:

$$P = (O, 2, 3) + (O, 4, 1);$$

das erste Dreieck hat negativen, das zweite positiven Inhalt, und also ist der Inhalt unseres sich überschlagenden Vierecks, wenn wir ihm den Umlaufssinn (1, 2, 3, 4) zuschreiben, gleich dem absoluten Inhalt des entgegen dem Uhrzeiger umlaufenen Teiles (O, 4, 1) vermindert um den des im Uhrzeigersinne umlaufenen Teiles (O, 2, 3).

Als zweites Beispiel betrachten wir ein Sternfünfeck.



Legen wir O in den mittleren Teil, so sind in der Summe:

$$P = (O, 1, 2) + (O, 2, 3) + \ldots + (O, 5, 1)$$

alle Teildreiecke positiv umlaufen; ihre Summe bedeutet den Inhalt des

fünfeckigen Kernes unserer Figur doppelt, jeden der 5 Zipfel einfach. Halten wir wieder den einmaligen Umlauf auf unserem Polygon (1, 2, 3, 4, 5, 1) daneben, so sehen wir, daß jeder Teil entgegen dem Uhrzeigersinne, und zwar der bei der Inhaltsbestimmung doppelt zu rechnende zweimal, der einfach zu rechnende einmal umlaufen wird.

Aus diesen beiden Beispielen abstrahieren wir sogleich die folgende allgemeine Regel: Für jedes geradlinige sich beliebig oft überschlagende ebene Polygon liefert unsere Formel als Inhalt die algebraische Summe der einzelnen Flächenstücke, die der Polygonzug begrenzt, wobei jedes Stück so oft in Rechnung zu stellen ist, als es bei einmaliger Durchlaufung des Umfanges (1, 2, 3 . . . n, 1) umlaufen wird, und zwar für eine jede Umlaufung positiv oder negativ, je nachdem es entgegengesetzt oder entsprechend dem Uhrzeigersinne umlaufen wird. Auch diesen Satz mögen Sie selbst allgemein bestätigen, was keinerlei Schwierigkeiten bietet. Um so mehr empfehle ich Ihnen, sich diese interessanten Inhaltsformeln an einzelnen Beispielen ganz zu eigen zu machen.

Wir wollen nun, meine Herren, von Polygonen zu krummlinig begrenzten Flächenstücken übergehen. Wir

betrachten also irgend eine geschlossene Kurve, die sich noch beliebig oft überschlagen kann; wir geben auf ihr einen bestimmten Umlaufungssinn, und fragen, welchen Inhalt sie begrenzt. Naturgemäß finden wir ihn, wenn wir die Kurve durch Polygone mit sehr vielen sehr kleinen Seiten annähern, und den Grenzwert des in der soeben erörterten Weise bestimmten Polygon-Inhaltes bilden. Sind $P(x|y)$ und $P_1(x+dx|y+dy)$ zwei benachbarte Eckpunkte eines solchen Näherungspolygones auf unserer Kurve, so setzt sich sein Inhalt aus Elementardreiecken (O, P, P_1) zusammen, also aus lauter Summanden:

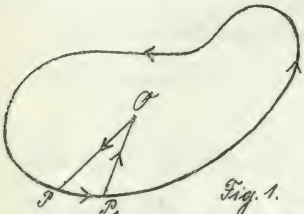


Fig. 1.

$$\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \\ x+dx & y+dy & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx).$$

In der Grenze geht diese Summe über in das längs der Kurve im gegebenen Sinne erstreckte Linienintegral:

$$\frac{1}{2}\int(x\,dy - y\,dx),$$

und dadurch ist der von der Kurve begrenzte Flächeninhalt definiert. Wollen wir das geometrisch interpretieren, so können wir das für Polygone ausgesprochene Resultat sofort übertragen: Jedes von der

Kurve umschlossene Flächenstück kommt in dem Integrale so oft positiv zur Geltung, als es entgegen dem Uhrzeigersinne, und so oft negativ, als es im Uhrzeigersinne umlaufen wird, während man die Kurve einmal im vorgeschriebenen Sinne durchläuft. Bei dem Oval (Fig. 1) erhalten wir demnach durch das Integral einfach den positiv gerechneten umschlossenen Flächeninhalt. In Fig. 2 ist der äussere Teil einmal, der innere zweimal positiv gerechnet, in Fig. 3. der linke negativ, der rechte positiv, so dass im ganzen ein negativer Inhalt

Fig. 2.

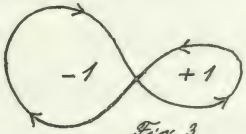


Fig. 3.

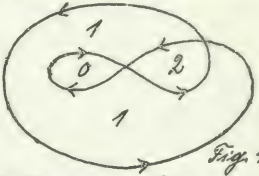


Fig. 4.

herauskommt; in Fig. 4 ist gar ein Teil garnicht zu rechnen, da er einmal positiv, einmal negativ umlaufen ist. Natürlich können so auch Kurven vom Inhalt Null entstehen, wenn man z. B. Fig. 3 symmetrisch zum Ueberschlagungspunkt einrichtet; das hat nichts Absurdes, wenn man bedenkt, dass diese ganze Inhaltsbestimmung nur auf zweckmässigen Verabredungen beruht.

Wie zweckmässig aber diese Begriffsbestimmungen sind, will ich Ihnen jetzt zeigen, indem ich Ihnen

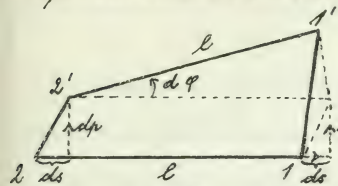
das

Polarplanimeter von Amsler

vorführe; dieser in der Praxis sehr viel gebrauchte, höchst sinnreiche Apparat führt in der Tat von selbst die Bestimmung von Flächeninhalten gerade in dem erörterten Sinne aus. Amsler war ein Mechaniker in Schaffhausen, der 1854 dieses Instrument konstruierte. Lassen Sie mich zunächst den theoretischen Teil der Konstruktion darstellen!

Wir denken uns eine Stange $A_1 A_2$ von der Länge l so über die Ebene hingeführt, daß A_1 und A_2 je eine geschlossene Kurve beschreiben, und die Stange wieder in ihre Ausgangslage zurückkehrt; wir wollen den Flächeninhalt bestimmen, den sie dabei überstreicht. Dazu denken wir uns entsprechend dem bei jeder Integration vorzunehmenden Grenzprozeß die kontinuierliche Bewegung ersetzt durch eine Folge kleiner ruckweiser „Elementarbewegungen", bei deren jeder l ein kleines Viereck beschreibt; die gesamte tatsächlich überstrichene Fläche ist dann gleich dem Grenzwert der Summe aller solchen „Elementarvierecke", deren jedes natürlich mit dem richtigen einem bestimmten Umlaufssinn ent-

sprechenden Vorzeichen zu versehen ist. Wir können nun



eine solche Elementarbewegung des Stabes l aus der Lage 1 2 nach 1' 2' aus drei Schritten zusammensetzen:

1.) Einer Verschiebung von l in seiner Richtung um ein Stück ds;

2.) einer Verschiebung von l normal zu seiner Richtung um ein Stück dφ;

3.) einer Drehung von l um das Ende A_2 durch einen Winkel dφ.

Dabei werden bezw. die Flächen 0, ds, l. dφ, $\frac{l^2}{2} d\varphi$ überstrichen; man wird das Elementarviereck (1, 1', 2', 2) einfach durch die Summe dieser Flächen ersetzen können, da die Abweichungen von höherer Ordnung sind, und beim Grenzübergange (der ja ein einfacher Integrationsprozeß ist) verschwinden. Übrigens liefert diese Summe

$$l \cdot d\varphi + \frac{l^2}{2} \cdot d\varphi$$

auch im Vorzeichen genau den Inhalt des Vierecks mit dem (positiven) Umlaufssinne (1, 1', 2', 2), wenn man dφ stets entgegen dem Uhrzeigersinne positiv misst, und ebenso dφ bei Verschiebung nach der Seite positiver φ hin positiv nimmt. Die Integration ergibt

für das ganze von l bestrichene Flächenstück

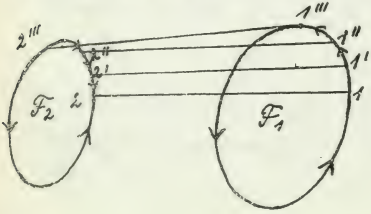
$$l \int d\varphi + \frac{l^2}{2} \int d\varphi .$$

Hier stellt $\int d\varphi$ den ganzen Winkel dar, um den sich l gegen seine Ausgangslage gedreht hat; da wir die Stange in ihre Ausgangslage zurückführten, so ist, wenn sie sich inzwischen nicht etwa um einen vollen Winkel gedreht hat, $\int d\varphi = 0$ und unser Flächenraum ist:

$$(1) \qquad \underline{F = l \int d\varphi .}$$

Sollte sich aber, was ja bei passenden Wegkurven von A_1 und A_2 wohl möglich wäre, die Stange ein oder mehrere Male selbst überschlagen haben, ehe sie in die Ausgangslage zurückkehrt, so ist $\int d\varphi$ ein Vielfaches von 2π und es ist daher für jede volle Umdrehung im positiven Sinne rechts der Wert $+ l^2\pi$, für jede im negativen Sinne dagegen der Wert $- l^2\pi$ hinzuzufügen. Wir wollen jedoch der Einfachheit halber diese kleine Komplikation hier bei Seite lassen.

Nun können wir <u>zweitens</u> diesen selben Flächeninhalt F in etwas anderer Weise bestimmen. Wege die Stange bei der Folge der Elementarbewegungen der Reihe nach die Lagen 1 2, 1′ 2′, 1″ 2″ ... annehmen, so wird F gleich der



Summe der Elementarvierecke:

$$\mathfrak{F} = (1,1',2',2) + (1',1'',2'',2') + (1'',1''',2''',2'') + \ldots,$$

oder genauer gesagt gleich dem den Grenzwert dieser Summe darstellenden Integral; dabei ist jedes Elementarviereck genau wie oben mit dem bestimmten hier angedeuteten Umlaufssinn zu nehmen. Nach unserer früheren Polygonformel haben wir daher, wenn O der irgendwie gelegene Koordinatenanfang ist:

$$\begin{aligned}\mathfrak{F} = {} & (O,1,1') + (O,1',2') + (O,2',2) + (O,2,1) \\ & + (O,1',1'') + (O,1'',2'') + (O,2'',2') + (O,2',1') \\ & + (O,1'',1''') + (O,1''',2''') + (O,2''',2'') + (O,2'',1'') \\ & + \ldots.\end{aligned}$$

Hier tritt in jeder Zeile an zweiter Stelle dasselbe Dreieck mit entgegengesetztem Umlaufssinn auf, wie in der folgenden an vierter Stelle ($(O,1',2') = -(O,2',1'), (O,1'',2'') = -(O,2'',1''), \ldots$), so daß sich diese Summanden sämtlich forthreben; ferner aber tritt, da sich die Reihe der Elementarvierecke schließt, in der letzten Zeile noch der Summand $(O,1,2)$ auf, der sich mit dem $(O,2,1)$ der ersten Zeile forthebt. Es bleiben also nur die ersten und dritten Dreiecke jeder Zeile übrig; die ersten geben aber zusammen nach dem früheren gerade das Polygon $(1,1',1'',1''' \ldots)$ und das ist in der Grenze der Inhalt F_1 der vom Stabende A_1 beschriebenen Kurve; ebenso ergeben die dritten Sum-

mandern, wenn man überall ein Minuszeichen hervorzieht, $(2, 2', 2'', 2''' \ldots)$, das heißt den Inhalt F_2 der von A_2 durchlaufenen Kurve. Es folgt also schließlich

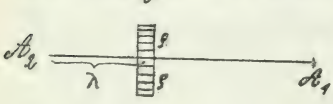
$$(2) \qquad \underline{J = F_1 - F_2},$$

und dabei können offenbar beide Kurven sich ganz beliebig überschlagen, wenn wir nur F_1 und F_2 unter genauer Beachtung unserer Vorzeichenregel definieren.

In den beiden Formeln (1) und (2) ist nun die geometrische Theorie des Planimeters enthalten. Lassen wir nämlich A_2 auf einer Kurve bekannten Flächeninhaltes F_2 laufen, und den „Fahrstift" A_1 auf der zu messenden Kurve gleiten, so können wir deren Flächeninhalt

$$(2') \qquad F_1 = F_2 + l \int d\varphi$$

sofort bestimmen, wenn wir eine Vorrichtung haben, die $\int d\varphi$ zu messen gestattet. Eine solche Vorrichtung hat nun Amsler – und das ist der zweite, mechanische Teil seiner Erfindung – geschaffen, indem er auf l als Achse eine Rolle anbrachte, die bei der Bewegung der Stange auf dem Papier abrollt. Ihre Entfernung von A_2 sei λ, ihr Radius ϱ. Der Winkel φ, den sie während der Bewegung von l beschreibt, wird sich additiv aus ihren Drehungen $d\varphi$ während der Elementar-



bewegungen zusammensetzen; ein jedes $d\psi$ wiederum können wir additiv zusammensetzen aus den Drehungen $d\psi_1$, $d\psi_2$, $d\psi_3$ bei den drei einfachen Bewegungen der Stange, aus denen wir jede Elementarbewegung oben (S. 23) komponierten. Bei der Längsverschiebung 1) zunächst wird sich die Rolle nicht drehen: $d\psi_1 = 0$; bei der Verschiebung 2.) von l normal zu sich um dp rollt ein Stück $dp = \rho\, d\psi_2$ der Rolle ab, also ist $d\psi_2 = \frac{1}{\rho} dp$; bei der Drehung 3.) um A_2 durch den Winkel $d\varphi$ endlich muß ein Stück $\lambda\, d\varphi = \rho\, d\psi_3$ der Rolle abrollen, so daß $d\psi_3 = \frac{\lambda}{\rho} d\varphi$ wird. Wir erhalten also schließlich:

$$d\psi = \frac{1}{\rho} dp + \frac{\lambda}{\rho} d\varphi .$$

Integrieren wir das über den gesamten Bewegungsvorgang, so ist $\int d\varphi = 0$, wenn l ohne Totaldrehung in seine Ausgangsstellung zurückkehrt, und es wird also der totale Drehungswinkel der Auslenderschen Rolle

$$\psi = \frac{1}{\rho} \int dp \qquad (3)$$

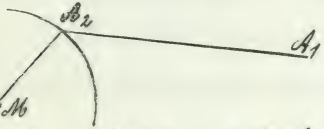
Sollte sich aber die Stange ein- oder mehrmals überschlagen, so treten rechts noch geeignete Vielfache von $2\pi\frac{\lambda}{\rho}$ hinzu, wovon wir jedoch, wie oben, wieder absehen wollen.

Halten wir nun die Formeln (2) und (3) zusammen, so ergibt sich schließlich

$$F_1 - F_2 = l \cdot \rho \cdot \psi$$

d. h. der Unterschied der von den beiden Enden der Stange umfahrenen Flächeninhalte wird durch den Drehungswinkel γ der Rolle gemessen.

Bei der Ausführung des Instrumentes wird man nun zweckmäßig F_2 zu Null machen; das erreichte Ansatz in konstruktiv ausgezeichneter Weise dadurch, daß er A_2 an einem Arme befestigt, der um einen festgehaltenen Punkt H drehbar ist. A_2 kann dann nur

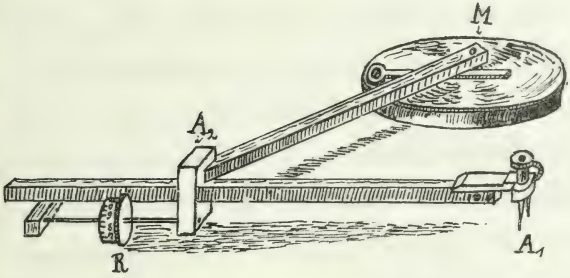


auf einer Kreisperipherie hin und her laufen, und daher keinen Inhalt umschließen – wenn wir auf die mögliche Komplikation, daß es den Kreis in dem einen oder anderen Sinne, eventuell auch mehrfach, umläuft, keine Rücksicht nehmen wollen. Im Hinblick auf diesen „Pol" H spricht man vom Polarplanimeter. Man verwendet den Apparat nun einfach so, daß man mit dem durch einen „Fahrstift" markierten Punkte A_1 die auszumessende Kurve umfährt, an der Rolle den Winkel γ abliest, und dann als umschlossenen Flächeninhalt

$$F_1 = l \cdot g \cdot \gamma$$

hat; die Apparatkonstante lg bestimmt man durch Ausmessen einer bekannten Fläche, etwa des Einheitsquadrates.

Ich kann Ihnen hier ein Bild des Polarplanimeters projizieren (vgl. nebenst. Skizze); natürlich müssen Sie sich dann den Apparat selbst ansehen und ihn zu handhaben versuchen, wenn Sie ihn völlig verstehen wollen. Damit der Apparat wirklich zuverlässig funktioniert, muß er selbstverständlich etwas komplizierter aufgebaut sein, als es das theoretische Prinzip allein fordern würde. Ich bemerke in dieser Hinsicht nur noch einiges weniges: Der Punkt M ist an einer schweren Masse festgelegt, und von ihm läuft eine Stange zum Punkte A_2 hinüber; die theoretisch wichtige Stange $A_1 A_2$, von der wir immer sprachen, ist nicht der zweite Metallstab, den Sie am Apparat bemerkten, sondern die diesem Stabe parallele ideelle Verlängerung der Achse der neben ihm angebrachten Rolle R, die durch den Fahrstift A_1 geht. Letzterer ist noch von einem Parallelstift begleitet, der ein Eindringen der Spitze von A_1 ins Papier verhindern soll. Die Rolle ist mit einem Nonius zur feineren Ablesung sowie einem Zahlrade



für volle Umdrehungen versehen.

Ich möchte jedoch hier statt weitere Einzelheiten aufzuführen noch gern allgemein davor warnen, bei der Betrachtung solcher Apparate über der Theorie die wirkliche praktische Ausführung zu vernachlässigen, wozu der reine Mathematiker leider oft gar zu sehr neigt, das ist eine ebenso unberechtigte Einseitigkeit, wie der entgegengesetzte extreme Standpunkt des Mechanikers, der ohne an der Theorie Interesse zu nehmen, in konstruktiven Einzelheiten sich verliert. Hier soll die angewandte Mathematik das Bindeglied herstellen; sie soll insbesondere dem Rechnung tragen, daß die theoretische Formulierung des Prinzipes am Apparat wirklich nie genau zutrifft; denn stets werden z. B. die Gelenke des Apparates etwas schlottern, die Rolle wird auf dem Papier gleiten statt abzurollen, und schließlich ist das Zeichenpapier selbst keine gleichmäßige Ebene und man wird auch nie mit dem Fahrstift ganz genau die Kurve entlang fahren können. In welchem Maße solche Momente Einfluß haben, auf wieviel Stellen infolgedessen das an der Rolle abgelesene Resultat genau sein kann, das ist natürlich für die Praxis von allergrößter Bedeutung und das hat die angewandte Mathema-

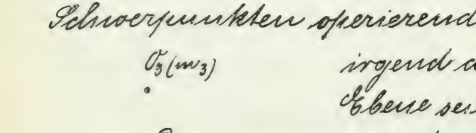
titz zu unterziehen.

Ich will im Anschluß an diesen Exkurs die gegenwärtige Vorlesung abgrenzen gegen zwei frühere Vorlesungen ähnlichen Titels, die gleichfalls autographiert vorliegen: „Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien" (S.-S. 1901; Ausgearb. v. C. H. Müller);[1] und „Einleitung in die höhere Geometrie" (W.-S. 1892/93 u. S.-S. 1893; Ausgearb. v. F. Schilling).[2] In der ersten Vorlesung stehet nämlich der soeben besprochene Unterschied zwischen abstrakter und praktischer Geometrie im Vordergrund; so haben wir damals im Seminar geradezu einen Vortrag über die Fehlerquellen beim Amslerschen Polarplanimeter gehabt. In der zweiten hingegen habe ich die Theorien der abstrakten Geometrie sehr weitgehend aufgebaut, so wie sie der Spezialist braucht, der im Sinne der heutigen Forschung selbständig auf diesem Gebiete arbeiten will. In der gegenwärtigen Vorlesung endlich will ich ein drittes: ich möchte sozusagen das Elementartheoretische der Geometrie darstellen, das, was jeder Lehramtskandidat unbedingt wissen sollte, insbesondere auch das, was für

1) 2. Auer Abdruck. Leipzig 1907.
2) 2 Teile. 2. Auer Abdruck. Leipzig 1907

die Anwendungen in Physik und Mechanik von fundamentaler Wichtigkeit ist; auf Dinge, die in jene ersten beiden Gebiete schlagen, werde ich immer nur gelegentlich hinweisen können.

Um nun wieder zu unseren allgemeinen Betrachtungen über Flächen- und Rauminhalte zurückzukehren, so will ich zunächst eine historische Notiz nachholen. Ich will Ihnen den Mann nennen, der zuerst das Prinzip der Vorzeichen in der Geometrie konsequent angewendet hat, nämlich den grossen Geometer A. F. Möbius in Leipzig. Das Buch, in dem er diesen bahnbrechenden Fortschritt macht, ist ein Jugendwerk aus dem Jahre 1827 der „barycentrische Calcul,“ [1] eines der Werke, das überhaupt für die neuere Geometrie grundlegend ist; seine Lektüre bietet auch schon seiner schönen Darstellung wegen besonderen Genuss. Der Titel bezieht sich darauf, dass Möbius von einer mit Schwerpunkten operierenden Betrachtung ausgeht. Es



irgend drei feste Punkte O_1, O_2, O_3 der Ebene seien drei Massen m_1, m_2, m_3 gelegt, die positiv oder negativ sein können; dann ist ihr Schwerpunkt P eindeutig bestimmt, und kann bei Variation von

[1] Leipzig 1827 = ges. Werke I (Leipzig 1885), pg. 1 ff.

w_1, w_2, w_3 die ganze Ebene überstreichen. Die 3 Massen w_1, w_2, w_3 werden nun als Koordinaten von P aufgefaßt, und es ist klar, daß P nur von den Verhältnissen dieser 3 Größen abhängt; damit ist zum ersten Male das, was wir heute allgemeine Dreieckkoordinaten nennen, in die Geometrie eingeführt. Soviel zur Erklärung des Titels jenes Möbiusschen Buches; von seinem sonstigen sehr interessanten Inhalt kommen für uns an dieser Stelle vor allem die §§ 17 - 20 in Betracht, wo das Vorzeichenprinzip auf die Inhaltsbestimmung von Dreieck und Tetraeder angewandt wird, und genau die Definitionen geschaffen werden, die ich Ihnen neulich vortrug.

Ich muß nun noch erwähnen, daß Möbius also aber dann diese Resultate noch durch eine Kapitale Entdeckung ergänzt hat, nämlich in der Arbeit, Ueber die Bestimmung des Inhalts eines Polyeders" [1] aus dem Jahre 1865. Dort hat er nämlich gezeigt, daß es Polyeder gibt, denen man auf keine Weise einen bestimmten Rauminhalt beilegen kann, während man doch, wie wir früher sahen, für jeder sich nicht zu sehr komplizierend durchsetzende Polygon der Ebene einen bestimm-

1) Berichte über die Verh. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. (math.-phys. Kl.) 1865 (17) pg. 31. - ges. Werke II (Leipzig 1886) pg. 473.

sein Flächeninhalt definieren kann. Auf diese merkwürdige Erscheinung müssen wir nun noch eingehen.

Ich gehe dabei von der früher aufgestellten Formel für den Inhalt des Tetraeders aus:

$$(1,2,3,4) = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

Entwickeln wir die Determinante nach Unterdeterminanten der letzten Kolonne, so kommt das – genau wie wir es früher (S. 15 f.) beim Dreieck sahen – darauf hinaus, daß wir unser Tetraeder in 4 andere zerlegen, die seine 4 Seiten zu Grundflächen und den Koordinatenanfang O zur Spitze haben. Nach den Vorzeichenregeln der Determinantentheorie ergibt sich dabei diese Formel, wenn wir auf zyklische Reihenfolge von 1, 2, 3, 4, achten:

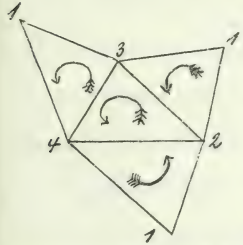
$$(1,2,3,4) = (O,2,3,4) - (O,3,4,1) + (O,4,1,2) - (O,1,2,3);$$

daß dabei Minuszeichen auftreten, während beim Dreieck nur Pluszeichen vorkommen, hat darin seinen Grund, daß Determinanten gerader Ordnung bei zyklischer Vertauschung ihr Zeichen wechseln, Determinanten ungerader aber nicht. Natürlich können wir durch geeignete Zeilenvertauschungen auch hier die Minuszeichen fortschaffen, wobei wir dann freilich

auf die zyklische Reihenfolge verzichten müssen, etwa:

$$(1,2,3,4) = (0,2,3,4) + (0,4,3,1) + (0,4,1,2) + (0,2,1,3).$$

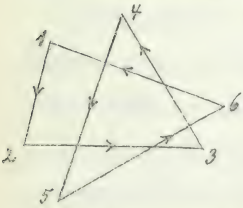
Um die hierin enthaltene Gesetzmäßigkeit zu durchschauen, denken wir uns die Tetraederoberfläche etwa aus Papier ausgeschnitten, und in die Ebene 2, 3, 4, hineingeklappt, wodurch die Ecke 1 drei verschiedene Lagen erhält. Dann gehen in die letzte Formel die Ecken jedes Seitendreiecks in einer Reihenfolge ein, die einem Umlauf entgegen dem Sinne des Uhrzeigers in der Figur entspricht, also dem gleichen Sinne in allen Dreiecken.



Dies können wir natürlich auch ohne jene Umklappung für die ursprüngliche Figur aussprechen. Da gehört jede der 6 Kanten 2 Seitendreiecken an, und man sieht, daß bei Umlaufung aller Dreiecke im angegebenen Sinne jede Seite das eine Mal im einen, das andere Mal im andern Sinne durchlaufen wird, durch diese Regel, die Möbius das Kantengesetz genannt hat, ist offenbar ein Umlaufssinn aller Seitendreiecke bestimmt, wenn man ihn in einem Dreieck willkürlich festlegt. Und nun besagt unsere Formel: Ein Tetraeder (1, 2, 3, 4) kann als Summe von 4 Teiltetraedern mit derselben ersten Ecke 0 aufgefaßt werden, indem man je 3 Ecken

in der Reihenfolge auf 0 folgen läßt, wie sie sich durch Fortsetzung des Umlaufungssinnes (2, 3, 4) nach dem Möbiusschen Kantengesetz ergibt.

Ganz wie wir früher (S. 17) die Zerlegungsformel für Dreiecke zur Definition des Inhaltes beliebiger Polygone verallgemeinerten, werden wir jetzt von dem letzten Resultat aus zur Definition des Rauminhaltes beliebiger Polyeder aufzusteigen suchen. Hierbei müssen wir sowohl zulassen, daß die Seiten eines einzelnen das Polyeder begrenzenden Polygons sich durchdringen, als auch, daß die Flächen verschiedener solcher Polygone sich irgendwie durchsetzen. Man wird nun irgend einen Hilfspunkt 0 hinzunehmen und zunächst einmal den Inhalt einer einzelnen Pyramide definieren, die von 0 aus ein Seitenpolygon projiziert.



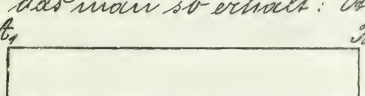
Dazu muß man erst auf ihrer Grundfläche, (es sei etwa die Seitenfläche (1, 2, 3, 4, 5, 6) des Polyeders) einen Umlaufungssinn haben, dann hat dies Polygon nach dem früheren einen bestimmten Inhalt, und wir werden wie in der Elementargeometrie den Rauminhalt der Pyramide (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6) gleich dem Produkte dieser Grundfläche in die Höhe, dividiert durch 3 setzen und nur ein positives oder negati-

dives Vorzeichen hinzufügen, je nachdem der Umlauf (1, 2, 3, 4, 5, 6) von O aus entgegen oder übereinstimmend mit dem Uhrzeigersinn erscheint. Man sieht unmittelbar, daß diese Definition die früheren das Tetraeder betreffenden Festsetzungen als Spezialfall enthält; man kann sie übrigens naturgemäß aus jenen herleiten, indem man das Polygon, wie zu seiner eigenen Inhaltsbestimmung, durch eine Summe im Sinne (1, 2, 3, 4, 5, 6) umlaufener Dreiecke ersetzt und die Pyramide als Summe der diese Dreiecke projizierenden Tetraeder definiert.

Nun nun das allgemeine Polyeder als Summe solcher Teilpyramiden darstellen zu können, wird man noch auf jeder Seitenfläche einen bestimmten Umlaufssinn festlegen müssen, und dafür kann nach dem Vorausgeschickten nur das Kantengesetz maßgebend sein: Man bestimme für ein Polygon den Umlaufungssinn beliebig und setze ihn dann so fort, daß jede Kante in beiden angrenzenden Polyederflächen in verschiedenem Sinne durchlaufen wird. Läßt sich diese Bestimmung auf der ganzen Oberfläche widerspruchslos durchführen, so ist der Polyederinhalt als Summe der Teilpyramiden von O nach den so umlaufenen Begrenzungspolygonen bestimmt, und man sieht leicht, daß diese Bestimmung eindeutig und von der

Lage von O unabhängig ist.

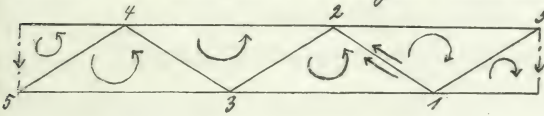
Nun ist aber das äußerst Merkwürdige, daß sich dies Kantengesetz nicht notwendig für jede geschlossene Polyederoberfläche widerspruchslos durchführen läßt, und daß es so Polyeder gibt, bei denen jede bestimmte Vorzeichendefinition versagt und denen man auf keine Weise einen bestimmten Inhalt zuordnen kann. Diese große Entdeckung ist es, die Möbius 1865 publiziert hat. Er geht da von dem später sog. Möbiusschen Blatt aus, das man so erhält: Aus einem langen schmalen Rechteck $A_1 B_1 A_2 B_2$ aus Papier heftet man, indem man es einmal



kordiert, die schmalen Seiten $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ so zusammen, daß A_1 auf A_2, B_1 auf B_2 fällt; dabei kommt offenbar die Vorderseite des Blattes mit der Rückseite in Berührung, so daß eine Fläche mit nur einer Seite entsteht. Etwas drastisch gesagt: ein Maler, der das Blatt einmal herum anstreichen soll, würde gerade doppelt soviel Farbe brauchen, als er nach der Länge des Blattes vermutet; denn hat er einmal die Länge des Blattes angestrichen, so ist er gerade der Ausgangsstelle gegenüber angelangt, und muß noch einmal herumgehen, ehe er wirklich zu ihr zurückkommt.

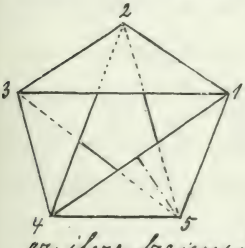
Statt dieses gekrümmten Blattes kann man sich

auch eine (nicht geschlossene) Polyederfläche mit lauter ebenen Teilen derselben Eigenschaft herstellen, indem man das Rechteck etwa mit einer Dreiecksteilung versieht, und längs deren Kanten knickt; für die entstehende Dreieckszone läßt sich dann bereits das Kantengesetz nicht mehr durchführen. Man braucht dazu mindestens 5 Dreiecke, die man wie in der Figur angeordnet hat; dabei sind



die Halbdreiecke rechts und links bei der Zusammenfaltung zu einem Dreieck (4, 5, 1) vereinigt.

Setzt man da den positiven Umlaufssinn von (1, 2, 3) nach links hin nach dem Kantengesetz fort, so hat man der Reihe nach die Sinne (3, 2, 4), (3, 4, 5), (5, 4, 1), (5, 1, 2), und so wird 1 2 schließlich wieder im selben Sinne durchlaufen, wie bei (1, 2, 3), entgegen dem Kantengesetz. Von oben gesehen erscheint das gefaltete Blatt



als eine fünfeckige Figur, deren Diagonalen die 5 Seiten 1 3, 3 5, 5 2, 2 4, 4 1 werden, wie nebenstehend skizziert. Aus dieser Dreieckszone stellt nun Möbius weiter sofort ein geschlossenes Polyeder her, indem er ihre freien Kanten – eben jene 5 Diagonalen – mit irgend einem, am Besten symmetrisch in der Mittellinie der

Figur gelegenen Raumpunkte O durch Dreiecke verbindet, mit anderen Worten, eine überschlagene fünfseitige Pyramide aufsetzt. Auf diesem geschlossenen aus 10 Dreiecken begrenzten Polyeder läßt sich das Kantengesetz natürlich gleichfalls nicht durchführen, und man kann daher bei ihm von einem Inhalt nicht sprechen.

Damit beende ich die Behandlung der Inhaltszahlen und will nun zu weiteren geometrischen Elementargrößen übergehen. Wie uns bisher der Name Möbius leitete, so werden wir jetzt an die Gedanken des großen Dichters Geometers Hermann Grassmann anschließen, die er zuerst 1844 in seiner „Linealen Ausdehnungslehre"[1] niedergelegt hat. Dies Buch ist wie das Möbiussche äußerst ideenreich aber im Gegensatz zu ihm ganz ungewöhnlich dunkel und undurchsichtig geschrieben, so daß es Jahrzehnte lang unbeachtet und unverstanden blieb; erst als man anderweitig auf ähnliche Gedankengänge gekommen war, erkannte man sie nachträglich in Grassmanns Buch wieder. Wollen Sie einen Eindruck von dieser abstrakten Schreibweise erhalten, so betrachten Sie nur die Kapitelüberschriften der Einleitung dieses Buches; sie lauten: Ableitung des Begriffes

1) Leipzig 1844 = Ges. math. u. phys. Werke 1, 1 (Leipzig 1894) pag. 1. – 2. Aufl. Leipzig 1878.

der reinen Mathematik, Ableitung des Begriffes der Ausdehnungslehre, Darlegung des Begriffes der Ausdehnungslehre, Form der Darstellung — dann folgt noch „Uebersicht der allgemeinen Formenlehre", und erst nachdem man sich durch diese allgemeinsten Darlegungen durchgekämpft hat, kommt man zu der immer noch sehr schwer verständlichen rein begrifflichen Darstellung des eigentlichen Stoffes. Erst in einer späteren Verbearbeitung, der „Ausdehnungslehre" [1] von 1862 versucht Grassmann eine etwas leichter zugängliche bestimmte analytische Darstellung mit Koordinaten. Das Wort „Ausdehnungslehre" übrigens hat sich Grassmann neu gebildet, um anzudeuten, daß sich seine Untersuchungen auf beliebig viele Dimensionen beziehen, während „Geometrie" für ihn nur die Anwendung dieser neuen ganz abstrakten Disziplin auf den gewöhnlichen Raum von 3 Dimensionen ist. Dies neue Wort hat sich jedoch nicht eingebürgert, sondern man spricht heutzutage kurzweg von n-dimensionaler Geometrie.

Wir wollen hier von der uns geläufigen analytischen Koordinatendarstellung aus die Grassmannschen Begriffe kennen lernen, indem wir zunächst auf die ebene Geometrie uns beschränken, überschreiben wir das nächste Kapitel:

---

1) Berlin 1862 = Werke 1, 2 (Leipzig 1896).

II. Das Grassmannsche Determinantenprinzip für die Ebene.

Wir knüpfen nun wieder an die Grundlage der Erörterungen des ersten Kapitels an; da hatten wir aus den Koordinaten dreier Punkte uns die Determinante gebildet:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

und als doppelten Inhalt eines Dreiecks, d. h. als Inhalt eines Parallelogrammes gedeutet. Das Neue ist nun, daß wir auch die Schemata aus den Koordinaten zweier und eines Punktes

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}$$

betrachten, die wir Matrizen nennen; wir verstehen darunter die Gesamtheit der Determinanten, die sich durch Fortlassen einer bezw. zweier Kolonnen aus dem Schema ergeben. So erhalten wir aus der ersten Matrix durch Fortlassen der ersten bezw. zweiten Zeile

$$Y = y_1 - y_2 \quad , \quad X = x_1 - x_2$$

und durch Fortlassen der dritten

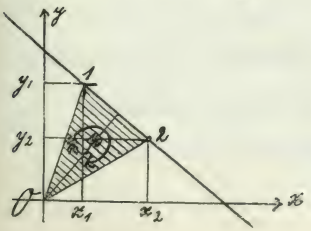
$$V = x_1 y_2 - x_2 y_1 \; ;$$

die Bezeichnungen sind so gewählt, wie es für die Raumgeometrie als zweckmäßig sich erweisen wird. Unsere Un-

Untersuchung wird sich darauf erstrecken, was für ein geometrisches Gebilde durch diese 3 Determinanten X, Y, N festgelegt wird; dieses Gebilde werden wir dann als neue dem Dreiecksinhalt gleichberechtigte geometrische Elementargröße auffassen. Bei der zweiten einreihigen Matrix sind die einreihigen Determinanten die Koordinaten x_1, y_1 selbst; sie bestimmen den Punkt 1 als einfachste Elementargröße und verlangen also keine weitere Untersuchung mehr.

Es wird danach jetzt verständlich sein, wenn ich sogleich das Grassmannsche Prinzip allgemein aussprechе: Es sollen in der Ebene wie im Raume alle Matrizen mit weniger Zeilen als Kolonnen betrachtet werden, deren jede Zeile aus den Koordinaten eines Punktes und einer 1 gebildet ist; es soll sodann untersucht werden, welche geometrischen Gebilde durch die Determinanten festgelegt sind, die man aus ihnen durch Wegstreichen hinreichend vieler Kolonnen erhält.

Doch nun wieder zum konkreten ebenen Problem. Was ist an der Figur zweier Punkte 1, 2 gegeben, wenn man die Determinanten X, Y, N kennt? Offenbar bleibt in der Lage der Punkte noch eine Freiheit, da sie vollständig erst durch 4 Größen bestimmt sind,



und zwar erhält man allemal dann und nur dann dasselbe Wertetripel X, Y, N, wenn 1 der End-, 2 der Anfangspunkt einer Strecke von bestimmter Länge und Richtung ist, die auf einer bestimmten Geraden sonst beliebig verschoben werden kann; den die Richtung andeutenden Pfeil denken wir uns hier wie im folgenden stets so gesetzt, daß er vom Anfangspunkt 2 nach dem Endpunkt 1 zeigt.

Daß durch X, Y, N zunächst die Verbindungsgerade 1 2 bestimmt ist, folgt unmittelbar, da man ihre Gleichung

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{auch schreiben kann}$$

$$Y \cdot x - X \cdot y + N = 0;$$

hieraus sieht man noch mehr, daß diese Gerade bereits durch die Verhältnisse $X : Y : N$ bestimmt ist. Weiter aber entnehmen wir unseren früheren Betrachtungen über Streckenlängen und Dreiecksinhalte, daß X und Y die Projektionen der Strecke $(1, 2)$ mit der Richtung von 2 nach 1 auf die x- und y-Achse, N aber den doppelten Inhalt des Dreieckes $(0, 1, 2)$ mit diesem Umlaufssinne darstellt; es ist klar, daß alle 3 Größen bei keinen anderen Bewegungen der Punkte 1, 2 als bei Verschiebung der Strecke längs ihrer Geraden ihren

Wert behalten, womit unsere Behauptung bewiesen ist. Grassmann nannte eine solche Strecke bestimmter Richtung und Länge auf bestimmten Geraden einen Linienteil; in der deutschen Physik ist der Name Vektor üblicher und zwar genauer „liniengleichartiger Vektor", da man einem Vektor schlechtweg auch Parallelverschiebung aus seiner Geraden heraus gestattet. Ein linienglechartiger Vektor, bestimmt durch die Matrix $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$, bezw. die Determinanten X, Y, N ist also die erste geometrische Elementargröße, die wir nach dem Grassmannschen Prinzip betrachten.

Ich bemerke hier bald, daß die Größen X, Y für sich einen „freien" Vektor bestimmen, da sie auch bei Parallelverschiebung der Strecke aus sich heraus ungeändert bleiben – ganz analog wie die 2 Größen aequivalenten Verhältnisse X : Y : N nur die unbegrenzte Gerade bestimmen, nicht die Länge der Strecke auf ihr. Der freie Vektor und die unbegrenzte Gerade sind also zwei Gebengebilde, auf die wir hier stoßen; das Prinzip, nach dem man solche Gebengebilde einführen kann, wird erst später entwickelt werden.

Diese Begriffsbildungen spielen in der Mechanik bei den Elementen der Statik eine äußerst wichtige Rolle, wo sie sich schon von altersher ganz naturgemäß

von selbst dargeboten haben; hier in der Ebene handelt es sich dabei um die Statik ebener starrer Systeme. Da kann man den Linienteil für die geometrische Behandlung als vollständiges Aequivalent der am System angreifenden Kraft auffassen, deren Angriffspunkt man eben wegen der Starrheit des Körpers beliebig in der Kraftrichtung verschieben kann. Stellen Sie sich hier die Kraft ganz im Sinne der alten Mechaniker vor:

Am Punkte 2 ist ein Seil angebracht, an dem ein durch die Länge der Strecke 1 2 repräsentierter Zug ausgeübt wird; man bildete früher sogar immer mit dem Seile eine daran ziehende Hand ab,[1] was ich gern als Beweis lebendiger Vorstellungen im Gegensatz zu der modernen abstrakten Darstellungsweise hervorhebe. Von den Koordinaten des Linienteils heißen nun X, Y die Komponenten der Kraft, N das Drehmoment um den Anfangspunkt O; denn aus der Gleichung der Geraden folgt als ihr Abstand von O

$$p = \frac{N}{\sqrt{X^2+Y^2}},$$

und daher ist N tatsächlich gleich dem Produkt aus p in die Länge $\sqrt{X^2+Y^2}$ der Strecke, d. i. die Größe der Kraft. Die 3 Größen zusammen kann man

1) vgl. z. B. die Tafeln in Varignon, Nouvelle méchanique ou statique. Paris 1725.

die Koordinaten der Kraft nennen, die analytische Definition ergibt für sie – und das ist besonders wichtig – in jedem Falle wohlbestimmte Vorzeichen, die man natürlich wie früher auch geometrisch deuten kann. Hierbei ist freilich anzumerken, daß wir in Rücksicht auf die Symmetrie der Formeln von der in der Mechanik meist gebräuchlichen Bestimmung des Vorzeichens des Drehmomentes abgewichen sind; sonst verwendet man nämlich die aus den Koordinaten des Anfangpunktes 2 und den beiden Koordinaten X, Y des freien Vektors gebildete Determinante $\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ X & Y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \end{vmatrix}$, die offenbar unserem Negativen gleich ist. Diese kleine Diskrepanz wird indessen, nachdem sie einmal hervorgehoben ist, zu Verwechslungen wohl kaum Anlaß geben.

Die erste Aufgabe der Mechanik starrer Körper ist nun, ein beliebiges System solcher Kräfte X_i, Y_i, Z_i $(i = 1, 2 \ldots n)$ zu einer Resultante zusammenzusetzen; das kommt analytisch darauf hinaus, den linienflüchtigen Vektor mit den Koordinaten $\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} Y_i, \sum_{i=1}^{n} Z_i$ zu bilden. Die graphische Statik entwickelt zur geometrischen Lösung dieser Aufgabe ihre sehr eleganten Methoden; bei 2 Kräften benutzt man einfach den bekannten Parallelogrammsatz, während man sonst mit „Kräftepolygon" und „Seilpolygon" vorgeht. Ich will

hier nur noch den besonderen Fall hervorheben, daß man 2 parallele, entgegengesetzt gleiche aber in verschiedenen Geraden wirkende Kräfte X, Y, V_1 und $-X, -Y, V_2$ zusammensetzt; als Resultante ergibt sich dann $0, 0, V_1 + V_2$. Damit weiß die elementare Darstellung nichts anzufangen, als daß sie neben den Kräften diese „Kräftepaare" besonders betrachtet, die dann überall als störend auftreten. Man kann das aber ganz leicht dem System einverleiben, wenn man davon ausgeht, daß unsere Formeln für die Intensität der Resultierenden $\sqrt{0^2 + 0^2} = 0$ und für ihren Abstand vom Anfangspunkt $p = \frac{V_1 + V_2}{0} = \infty$ ergeben; man kann nämlich leicht einen Grenzprozeß ausführen, bei dem man den Abstand p einer Kraft vom Anfangspunkt 0 so unendlich und ihre Intensität $\sqrt{x^2 + y^2}$ so klein werden läßt, daß das Produkt $p \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$, das Drehmoment, endlich bleibt, und demgemäß wird man die Resultierende $0, 0, V_1 + V_2$ als unendlich kleine, unendlich weit Kraft von endlichem Drehmoment ansprechen. Diese Fiktion ist für die fortschreitende Abänderung äußerst bequem und nützlich, sie entspricht ja ganz der sonst gebräuchlichen Einführung unendlich kleiner Elemente in der Geometrie. Wir haben aber weiter noch den Vorteil, den ausnahmslosen Satz aus-

sprechen zu können, daß beliebig viele Kräfte stets eine Kraft zur Resultierenden haben, während die elementare Darstellung stets noch die Alternative des Kräftepaares mitschleppen muß.

Ich will nun unsere Erörterungen dadurch vervollständigen, daß ich das Verhalten unserer Elementargrößen bei Koordinatentransformationen untersuche; das wird uns dann ein wertvolles Klassifikationsprinzip liefern, durch das die Grassmannsche Systematik erst ihre feinere Ausführung erhält.

Was zunächst die Formeln der Koordinatenänderungen angeht, so beginne ich mit 4 fundamentalen Transformationen des rechtwinkligen Koordinatensystems:

1.) Parallelverschiebung:

$$(A_1) \quad \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases};$$

2.) Drehung um den Winkel φ:

$$(A_2) \quad \begin{cases} x' = x \cos\varphi + y \sin\varphi \\ y' = -x \sin\varphi + y \cos\varphi \end{cases};$$

3.) Spiegelung an der x-Achse:

$$(A_3) \quad \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases};$$

4.) Veränderung des Maßstabes:

$$(A_4) \quad \begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = -\lambda y \end{cases}.$$

Setzt man diese 4 Transformationen für alle möglichen Werte der Parameter a, b, φ, λ miteinander zusammen, so entsteht der allgemeinste mögliche Übergang von einem rechtwinkligen Koordinatensysteme zu einem anderen bei gleichzeitigem Wechsel des Maßstabes. Die Gesamtheit dieser Transformationen bildet eine „Gruppe", d. h. irgend 2 von ihnen zusammengesetzt geben wieder eine Transformation derselben Gesamtheit; die speziellen Transformationen (A), aus denen man alle anderen zusammensetzen kann, heißen die Erzeugenden der Gruppe.

Bevor wir nun zusehen, wie diese einzelnen Transformationen unsere Determinanten Δ, γ, Δ' verändern, will ich 2 allgemeine Prinzipien aussprechen, die in dieser Allgemeinheit etwas dunkel klingen müssen, aber in den Kontreten Erörterungen bald ganz deutlich werden sollen. Das eine ist, daß die gesuchten Eigenschaften irgend welcher Figuren stets sich in Formeln aussprechen müssen, die nicht geändert werden, wenn man das Koordinatensystem abändert, d. h. die Koordinaten sämtlicher Punkte der

Figur gleichzeitig einer unserer Transformationen unterwirft, und umgekehrt muß auch jede Formel, die in diesem Sinne invariant gegen die Gruppe dieser Koordinaten-transformationen ist, eine geometrische Eigenschaft darstellen. Als einfachste Beispiele, wie sie jeder kennt, sei da nur an die Ausdrücke der Entfernung oder des Winkels in den Figuren mehrerer Punkte oder Geraden erinnert; von diesen und vielen anderen ähnlichen Formeln wird ja im folgenden immer wieder zu handeln sein. Hier nur noch zur Verdeutlichung auch ein ganz triviales Beispiel für nicht invariante Formeln: haben wir für die aus einem Punkt der Ebene bestehende Figur die Gleichung $y = 0$, so sagt sie aus, daß dieser Punkt auf der x-Achse liegt, die doch eigentlich eine ganz willkürliche dem Wesen der Figur fremde Lage ist, die nur ihrer bequemen Beschreibung dient. So wird jede nicht invariante Gleichung irgend eine Beziehung der Figur zu äußeren willkürlich hinzugefügten Dingen, insbesondere dem Koordinatensystem, und keine geometrischen Eigenschaften der Figur selbst darstellen.

Das zweite Prinzip bezieht sich darauf, daß man ein System von analytischen Größen hat, die aus den Koordinaten mehrerer Punkte 1, 2 ... gebildet sind – wie z. B. unsere 3 Größen X, Y, V. Hat dies System

die Eigenschaft, daß es sich bei allen unseren Koordinatentransformationen in bestimmter Weise sich selbst transformiert, d. h. daß sich das aus den neuen Koordinaten der Punkte 1, 2 ... in gleicher Weise gebildete Größensystem allein durch die aus den alten Koordinaten gebildeten Größen ausdrückt (ohne daß man die Koordinatenwerte selbst hinzunehmen muß), so sagen wir, daß es eine neue geometrische d. h. eine vom Koordinatensystem unabhängige Größe definiert; ja wir werden sogar alle analytischen Ausdrücke geradezu nach der Art klassifizieren, wie sie sich bei Koordinatentransformationen verhalten und zwei Serien von Ausdrücken, die sich in gleicher Weise transformieren, auch geometrisch als gleichwertig, d. h. als gleichwertige geometrische Gebilde definierend ansehen.

Das alles wollen wir nun sogleich an dem von den Grassmannschen Elementargrößen gelieferten Material näher erläutern. Wir unterwerfen dazu also unsere beiden Punkte $x_1 | y_1$, $x_2 | y_2$ der gleichen Koordinatentransformation; beginnen wir mit der Parallelverschiebung ($\mathfrak{G}_1$) und setzen also:

$$x_1' = x_1 + a \qquad x_2' = x_2 + a$$
$$y_1' = y_1 + b \qquad y_2' = y_2 + b .$$

Vergleichen wir die Koordinaten des Linienteils vor und

nach der Transformation:

$$X = x_1 - x_2\,, \quad Y = y_1 - y_2\,, \quad N = x_1 y_2 - x_2 y_1$$
$$X' = x_1' - x_2'\,, \quad Y = y_1' - y_2'\,, \quad N' = x_1' y_2' - x_2' y_1'\,,$$

so ergibt sich unmittelbar:

$$(B_1) \qquad \begin{cases} X' = X \\ Y' = Y \\ N' = N + b\,X - a\,Y \end{cases}$$

Ganz genau so erhält man die Transformationsformeln:

2.) bei der Drehung (A_2):

$$(B_2) \qquad \begin{cases} X' = X\cos\varphi + Y\sin\varphi \\ Y' = -X\sin\varphi + Y\cos\varphi \\ N' = N \end{cases}$$

3.) bei der Spiegelung (A_3):

$$(B_3) \qquad \begin{cases} X' = X \\ Y' = -Y \\ N' = -N \end{cases}$$

4.) bei der Maßstabänderung (A_4):

$$(B_4) \qquad \begin{cases} X' = \lambda X \\ Y' = \lambda Y \\ N' = \lambda^2 N \end{cases}$$

Für den letzten Formeln (B_4) tritt das hervor, was man in der Physik Dimension nennt, nämlich der Exponent der Potenz von λ, mit der sich die einzelne Größe multipliziert: X, Y haben die Dimension 1 einer Länge,

N die 2 eines Flächeninhalts.

Wir bemerken zunächst, indem wir diese 4 Formelgruppen überblicken, daß der durch die 3 Determinanten X, Y, N definierte Linienteil tatsächlich unserer allgemeinen Definition der geometrischen Größe genügt: die neuen Koordinaten X', Y', N' drücken sich tatsächlich allemal lediglich durch die alten X, Y, N aus.

Aber noch mehr: Betrachten wir überall nur die beiden ersten Gleichungen für X', Y'. Sie zeigen, daß sich die beiden ersten Koordinaten X, Y des Linienteiles bei Verschiebung garnicht, sonst genau wie die PunktKoordinaten ändern. Namentlich möchte ich dabei betonen, daß N in diese Ausdrücke für X', Y' garnicht eingeht; d. h. die beiden ersten Koordinaten X und Y transformieren sich für sich allein unabhängig von dem besonderen Wert der dritten N. Aus diesem Umstande können wir aber unserem allgemeinen Prinzip zufolge schließen, daß bereits dem nur durch die 2 Größen X, Y festgelegten Gebilde eine vom Koordinatensystem unabhängige geometrische Bedeutung zukommt, und wir wissen ja bereits, daß dies Gebilde der freie Vektor ist; wir haben hier also das früher angekündigte systematische Prinzip gefunden, das die Einführung dieses Gebildes neben dem Linien-

teil veranlaßt.

Auf demselben Gebiete liegt noch folgende Betrachtung: Da in allen 4 Formelgruppen X', Y', Z' homogene lineare Funktionen von X, Y, Z sind, so ergibt sich durch Division je zweier Gleichungen, daß die Verhältnisse $X' : Y' : Z'$ auch nur von den Verhältnissen $X : Y : Z$ abhängen. Also muß auch dem durch diese Verhältnisse $X : Y : Z$ ohne Rücksicht auf die wirklichen Werte der drei Größen festgelegten Gebilde geometrische Bedeutung zukommen, und in der Tat ist es, wie schon früher erwähnt, die linienbegrenzte Gerade.

Spezialisieren wir nun unsere Formeln (B) für den Fall eines Kräftepaares $X = Y = 0$, Z; sie ergeben dann natürlich stets $X' = Y' = 0$, während in den 4 einzelnen Fällen

$$\begin{aligned} (C_1) \quad & Z' = Z \\ (C_2) \quad & Z' = Z \\ (C_3) \quad & Z' = -Z \\ (C_4) \quad & Z' = \lambda^2 Z \end{aligned}$$

wird. Indem wir den üblichen Ausdruck Invariante für eine Größe benutzen, die bei den Operationen einer Transformationsgruppe sich höchstens um einen Faktor ändert, und die Invariante noch eine absolute oder relative nennen, je nachdem dieser Faktor 1 ist oder nicht, können wir die Formeln (C) in die Worte fassen: Das

Drehmoment eines Kräftepaares ist eine relative Invariante gegenüber allen rechtswinkligen Koordinatentransformationen der Ebene.

Vergleichen wir nun damit noch das Verhalten der letzten geometrischen Elementargröße, des Dreiecksinhaltes

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

bei unseren Koordinatentransformationen. Die Verschiebung (A_1) ändert diese Determinante nicht, da sie nur zu den Elementen der ersten Kolonne x, zu denen der zweiten b, d. h. das a-fache bezw. b-fache der Elemente der letzten Kolonne addiert:

$$(\mathfrak{D}_1) \qquad \Delta' = \Delta.$$

Ebenso ergibt sich ganz leicht bei den andern drei Arten von Transformationen

$$(\mathfrak{D}_2) \qquad \Delta' = \Delta$$
$$(\mathfrak{D}_3) \qquad \Delta' = -\Delta$$
$$(\mathfrak{D}_4) \qquad \Delta' = \lambda^2 \Delta,$$

was man natürlich alles auch aus der geometrischen Bedeutung des Dreiecksinhaltes unmittelbar schließen könnte. Diese Formeln stimmen nun aber genau mit $(\mathfrak{C})$ überein: Ein Dreiecksinhalt und so schließlich jeder Flächeninhalt (der ja als Summe von Dreiecken dar-

stellbar ist) verhält sich bei beliebigen Koordinatentransformationen genau so, wie das Drehmoment eines Kräftepaares. Nach unserem zweiten allgemeineren Prinzip haben wir beide Dinge daher geometrisch als gleichwertig anzusehen, und wir können uns den Sinn dieser Aussage in folgender Weise verdeutlichen: Haben wir irgend ein Kräftepaar mit dem Drehmoment N in der Ebene und definieren wir irgendwie einen Dreiecksinhalt $\Delta = N$, so bleibt bei jeder Koordinatentransformation diese Gleichung erhalten, d. h. wir können das Drehmoment eines Kräftepaares unabhängig vom Koordinatensystem durch den Flächeninhalt eines Dreiecks oder Parallelogrammes oder sonst einer Figur versinnlichen. Wie diese Zuordnung geometrisch zu geschehen hat, werden wir später bei den ganz analogen, nur etwas komplizierteren und daher lehrreicheren Verhältnissen im Raume sehen.

Ich will damit die Ebene verlassen, wo diese Begriffsbildungen ja eine nahezu triviale Einfachheit haben. Allen analytischen Formeln läßt sich unmittelbar ihre gute geometrische Bedeutung zuweisen, wobei von selbst auch die volle analytische Allgemeinheit in die Geometrie hineinkommt, eine wesentliche Voraussetzung ist dabei immer, wie noch einmal betont sei, daß ein für alle Mal die richtigen Verabredungen über Vorzeichen

der geometrischen Gebilde getroffen sind.

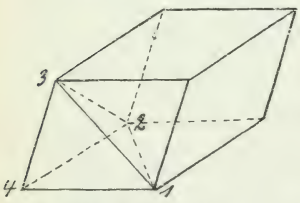
Wir wollen nun in völliger Analogie zu den bisherigen Betrachtungen

III. das Grassmannsche Prinzip für den Raum

behandeln. Demgemäß betrachten wir jetzt die aus den Koordinaten von 1, 2, 3 oder 4 Punkten gebildeten Matrizen:

$$|x_1\ y_1\ z_1\ 1|,\quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Die Determinanten der ersten Matrix stellen die Punktkoordinaten selbst dar und erfordern keine weiteren Erörterungen. Die vierte Matrix ist bereits eine vierreihige Determinante und gibt, wie wir wissen, den sechsfachen Tetraederinhalt (1, 2, 3, 4); wir können sie übrigens bekanntlich auch einfach als Inhalt des Parallelepipeds mit den Kanten 41, 42, 43 auffassen, das Grassmann als Spath bezeichnet. (das Wort Spath ist der Bergbausprache – Kalkspath! – entnommen).



Die neuen Gebilde liefern die zweite und dritte Matrix. Die zweireihige Matrix stellt den Inbegriff der folgenden 6 Determinanten

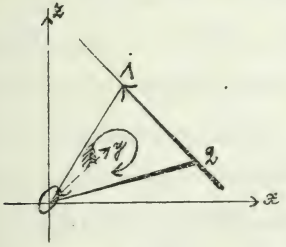
zweiter Ordnung dar, die sich durch Wegstreichen je zweier Kolonnen bilden lassen:

$$(1)\quad \begin{cases} X = x_1 - x_2\,,\quad Y = y_1 - y_2\,,\quad Z = z_1 - z_2\,, \\ L = y_1 z_2 - y_2 z_1\,,\quad M = z_1 x_2 - z_2 x_1\,,\quad N = x_1 y_2 - x_2 y_1\,, \end{cases}$$

und ebenso repräsentiert die dreireihige Matrix folgende 4 Determinanten 3. Ordn:

$$(2)\quad \begin{cases} \Lambda = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}\,,\quad M = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}\,,\quad N = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\,, \\ P = -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}\,. \end{cases}$$

Was nun die 6 Determinanten (1) anlangt, so können wir aus den entsprechenden Erörterungen für die Ebene leicht entnehmen, daß X, Y, Z die Projektionen der Strecke von 2 nach 1 auf die Koordinatenachsen sind, L, M, N aber die doppelten Inhalte der Projektionen des Dreiecks (0, 1, 2), mit diesem Umlaufungssinne genommen, in die Koordinatenebenen. Alle diese Größen bleiben offenbar ungeändert, wenn man die Strecke (1, 2) unter Erhaltung ihrer Länge und ihres Sinnes längs ihrer Geraden verschiebt, sie stellen also das dar, was wir wieder



einen Linienteil oder linienflüchtigen Vektor des Raumes nennen werden. X, Y, Z bleiben selbst noch ungeändert, wenn man den Vektor aus seiner Geraden heraus-parallel mit sich verschiebt, und bestimmen also für sich genommen einen freien Vektor.

Die 4 Determinanten (2) bestimmen vor allem einmal die Ebene der 3 Punkte 1, 2, 3; denn deren Gleichung

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

kann man offenbar schreiben:

$$\Lambda x + M y + N z + P = 0,$$

so daß bereits die Verhältnisse $\Lambda : M : N : P$ die unbegrenzte Ebene festlegen. Weiterhin aber sehen wir sofort, daß Λ, M, N gleich den Inhalten der Projektionen des Dreieckes $(1, 2, 3)$ in die Koordinatenebenen, stets mit diesem Bestimmten Umlaufssinne genommen sind, und daß P gleich dem 6-fachen Volumen des Tetraeders $(0, 1, 2, 3)$ ist, wiederum mit dem dieser Reihenfolge der Ecken entsprechenden Vorzeichen. Diese 4 Größen bleiben nun offenbar dann und nur dann unverändert, wenn man das Dreieck $(1, 2, 3)$ derart in seiner Ebene verschiebt und deformiert, daß nur sein Inhalt

und sein Umlaufungssinn ungeändert bleibt, und sie bestimmen also ein Dreieck von dieser Beweglichkeit, das Grassmann einen Ebenenteil oder eine Raumgröße nennt. Die drei ersten Koordinaten λ, μ, ν des Ebenenteils bleiben auch dann ungeändert, wenn man noch die Dreiecksebene parallel mit sich verschiebt; sie bestimmen also ein frei im Raume parallel mit sich verschiebbares Dreieck nach Inhalt und Umlaufssinn, eine sog. freie Raumgröße.

Wollen wir nun mit dem Linienteil uns näher beschäftigen, so haben wir zuerst zu bemerken, daß er im Raume durch 5 frei variable Parameter festgelegt wird, da seine beiden Endpunkte zusammen 6 Koordinaten haben, aber der eine Endpunkt noch längs einer Geraden beliebig bewegt werden kann. Also können die 6 Koordinaten X, Y, Z, L, M, N des Linienteils, die wir oben definierten, keine von einander unabhängigen Größen sein, sondern sie müssen einer Bedingung genügen. Wir leiten diese am einfachsten aus der Determinantentheorie her, die uns ja überhaupt stets der Schlüssel zu unseren Theorien ist. Wir betrachten die folgende Determinante:

$$\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z_1 & 1 \\ z_2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0 ,$$

die gewiss identisch verschwindet, da 2 Zeilen Element für Element übereinstimmen. Diese Determinante entwickeln wir als Summe von Produkten entsprechender Unterdeterminanten der ersten und letzten beiden Zeilen: der erste Summand enthält die beiden durch Umrahmung angedeuteten Unterdeterminanten, ist also einfach gleich $N \cdot Z$, und analog ergibt sich für die ganze Determinante der Wert $2(N \cdot Z + M \cdot Y + L \cdot X)$, also lautet unsere Relation:

$$X \cdot L + Y \cdot M + Z \cdot N = 0. \qquad (3)$$

Man kann sich nun leicht überzeugen, daß diese so als notwendig erkannte Bedingung für die Koordinaten eines Linienteils auch hinreichend ist, d. h. daß man jedes ihr genügende System von 6 Größen durch die Formeln (1) als Koordinaten eines Linienteils darstellen kann; ich brauche auf die Durchführung dieser ganz elementaren Ueberlegung hier wohl nicht erst einzugehen.

Ich will nun wieder zur mechanischen Anwendung dieser Begriffe übergehen. Als Repräsentanten einer am starren räumlichen Körper angreifenden Kraft haben wir genau wie in der Ebene (S. 46) einen Linienteil, der Angriffslinie, Größe und Richtung der Kraft darstellt. Von den Koordinaten des Linien-

teils heißen X, Y, Z die Komponenten der Kraft parallel zu den Koordinatenachsen L, M, N ihre Drehmomente um diese.[1] Die 3 Komponenten X, Y, Z legen die Richtung der Kraft bezw. des Linienteils fest, deren Richtungscosinus gegen die Achsen sich wie $X : Y : Z$ verhalten; man erhält sie als Diagonale des Parallelepipeds, das die auf den Koordinatenachsen abgetragenen Stücke X, Y, Z zu Kanten hat. Durch dieselbe Konstruktion kann man aus den drei Größen L, M, N eine bestimmte Richtung gewinnen, die Richtung der Achse des resultierenden Drehmomentes heißt. Die Bedingungsgleichung (3) bedeutet nun nach einer bekannten Formel der Raumgeometrie nichts, als daß die Richtung der Kraft und die der Achse des resultierenden Drehmomentes aufeinander senkrecht stehen. Genau wie in der Ebene werden wir auch hier den speziellen Fall des Kräftepaares hervorzuheben haben; das ist ein Linienteil, für den $X = Y = Z = 0$ ist, während L, M, N nicht sämtlich verschwinden; ein einfacher Grenzübergang ergibt, daß man darunter eine unendlich weite, unendlich kleine Kraft zu verstehen hat, deren Drehmomente endlich

1) Wiederum haben wir hier das entgegengesetzte Vorzeichen, als man es in der Mechanik gewöhnlich gebraucht (vgl. S. 47)

bleiben. Die elementare Theorie scheut wieder diese Sprechweise, und kennt das Kräftepaar nur als Zusammenwirken zweier gleich grosser paralleler, aber entgegengesetzt gerichteter Kräfte längs verschiedener Geraden: X, Y, Z, L_1, M_1, N_1, und $-X, -Y, -Z, L_2, M_2, N_2$, die zusammen in der Tat gerade solche Koordinaten $0, 0, 0, L_1 + L_2, M_1 + M_2, N_1 + N_2$ ergeben, wie wir sie soeben annahmen.

Wir haben nun von der Zusammensetzung eines Systems irgendwie gegebener Kräfte am starren Körper

$$X_r, Y_r, Z_r, L_r, M_r, N_r \quad (r = 1, 2, \ldots)$$

zu sprechen. Auf dieses Gebiet pflegt man in elementaren Büchern und Vorlesungen lange Zeit zu verwenden, während wir es hier sehr schnell werden erledigen können, da unsere analytischen Formeln alle die in der schwerfälligen elementaren Darstellung beim Nichtgebrauch der Vorzeichenregeln nötig werdenden Fallunterscheidungen erübrigen. Das Grundprinzip der Zusammensetzung ist, daß wir die Summen

$$\Xi = \sum X_r, \quad H = \sum Y_r, \quad Z = \sum Z_r,$$
$$\Lambda = \sum L_r, \quad M = \sum M_r, \quad N = \sum N_r$$

bilden und sie als Koordinaten des Kraftsystemes oder nach einem von Rücker eingeführten zweckmäßigen Ausdruck, als Koordinaten der Dyname bezeichnen; wir

unterscheiden dabei wieder die Komponenten längs der Achsen, und die 3 Drehmomente um die Achsen. Nun wird aber diese Dyname im allgemeinen keine Einzelkraft sein, denn die 6 Summen werden nicht notwendig wieder der für die Koordinaten eines einzelnen Linienteiles geltenden Bedingung

$$\Xi \cdot \Lambda + H \cdot M + Z \cdot N = 0$$

genügen. Das ist also gegenüber der Ebene das Neue, daß sich ein System von Kräften am starren Körper nicht notwendig wieder auf eine Kraft reduziert.

Um nun vom Wesen einer Dyname eine konkrete Vorstellung gewinnen zu können, wollen wir sie in möglichst übersichtlicher Weise als Resultierende zweier, vielleicht nur zweier Kräfte darzustellen versuchen. In der Tat kann man jede Dyname auffassen als Resultierende einer Einzelkraft und eines Kräftepaares, dessen Achse der Wirkungsgeraden jener Einzelkraft, der sog. Zentralachse der Dyname, parallel ist, und diese Zerlegung ist nur auf eine Art möglich. Diese Theorie hat ihre erste klassische Darstellung gefunden in Poinsots Éléments de statique, die 1804 zum ersten Male erschienen sind und seitdem zahlreiche neue Auflagen [1] erlebt haben, man spricht

1) 12 éd. par J. Bertrand. Paris 1877.

daher auch wohl von der Poinsotschen Zentralachse.
Uebrigens behandelt Poinsot die Theorie sehr anschaulich elementargeometrisch an der Hand von Figuren, wie sich das bis heute im elementaren Unterricht erhalten hat.

Um nun das ausgesprochene Theorem zu beweisen, bemerken wir, daß jede Einzelkraft, die nach Abzug eines Kräftepaares aus der Dyname entsteht, jedenfalls die Komponenten Ξ, H, Z haben muß; also müssen die Drehmomente unseres Kräftepaares proportional $\Xi : H : Z$ sein, wenn anders seine Achse der Zentralachse parallel ist. Wir haben seine 6 Koordinaten also anzusetzen als

$$0,\ 0,\ 0,\ k\Xi,\ k\cdot H,\ k\cdot Z,$$

wo k ein noch zu bestimmender Parameter ist. Zu unserer gegebenen Dyname Ξ, H, Z, Λ, M, N wird dies Kräftepaar ergänzt durch die Dyname

$$\Xi, H, Z, \Lambda - k\cdot\Xi, M - k\cdot H, N - k\cdot Z,$$

und der Satz wäre bewiesen, wenn man k so bestimmen könnte, daß das eine Einzelkraft wird. Dazu ist aber notwendig und hinreichend, daß die Koordinaten der Bedingung (3) genügen, d. h. daß

$$\Xi(\Lambda - k\Xi) + H(M - kH) + Z(N - k\cdot Z) = 0.$$

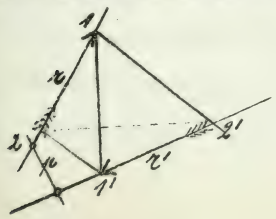
Hieraus folgt aber eindeutig

$$k = \frac{\Xi\Lambda + HM + ZN}{\Xi^2 + H^2 + Z^2},$$

denn den Vektor können wir von O verschieden annehmen, da sonst bereits ein Kräftepaar statt einer eigentlichen Dyname vorläge. Erteilt man k diesen Wert, den Plücker Parameter der Dyname nennt, so hat man in der Tat die gewünschte Zerlegung der Dyname in Kräftepaar und Einzelkraft erhalten, und der Beweisgang läßt zugleich ihre Eindeutigkeit erkennen.

Nun ist die Frage, was man für geometrische Vorstellungen mit dieser Zerlegung verbinden kann. Auch diese Untersuchungen gehen wieder auf Möbius zurück, und zwar auf sein Lehrbuch der Statik [1] von 1837. Da stellt er die Frage nach den Achsen-voran, in Bezug auf die die Dyname das Drehmoment Null hat, die sog. Nullachsen; das System aller dieser Nullachsen bezeichnet er als Nullsystem und hieran hat dieses Ihnen gewiß bekannte Wort seine Wurzel.

Wir müssen nun erst den hier zur Verwendung kommenden allgemeinen Begriff des Drehmomentes oder Momentes definieren. Es seien zunächst zwei Linienteile (1, 2) und (1', 2') im Raume gegeben. Wir bilden aus ihnen 4 Ecken das Tetraeder (1, 2, 1', 2'), dessen Raum-



1.) Leipzig 1837 = Werke III (Leipzig 1887).

inhalt

$$\frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x'_1 & y'_1 & z'_1 & 1 \\ x'_2 & y'_2 & z'_2 & 1 \end{vmatrix}$$

ist. Diese Determinante rechnen wir nun so als Summe von Produkten der Unterdeterminanten der ersten und letzten beiden Zeilen aus, wie wir das oben mit der identisch verschwindenden Determinante (S. 61 f.) taten, und erhalten

$$\frac{1}{6}(x\cdot L' + y\cdot M' + z\cdot N' + L\cdot x' + M\cdot y' + N z'),$$

wo $x' \ldots N'$ die Koordinaten des Linienteiles $(1', 2')$ sind. Die hier auftretende bilineare Kombination der Koordinaten der beiden Linienteile

$$x L' + y M' + z N' + L x' + M y' + N z'$$

nennen wir das <u>Moment des einen Linienteiles in Bezug auf den andern</u>; es ist gleich dem <u>6-fachen Inhalt des von den Endpunkten beider Linienteile gebildeten Tetraeders</u> und ist daher eine vom Koordinatensystem unabhängige geometrische Größe. Sind r und r' die Längen der Linienteile, φ ihr Winkel und p der kürzeste Abstand (gemeinsames Lot) ihrer beiden Geraden, so sieht man elementargeometrisch leicht ein, daß <u>das Moment gleich $r\cdot r'\cdot p\cdot \sin\varphi$ ist</u>, wenn man über das Vorzeichen von φ passend verfügt.

Geben wir nun statt des Linienteiles (1, 2) eine unbegrenzte Gerade, so werden wir unter dem Moment des Linienteils (1', 2') in Bezug auf sie verstehen sein Moment im vorigen Sinne, in Bezug auf einen in der unbegrenzten Geraden liegenden Linienteil von der Länge $r = 1$, also den Ausdruck $r'p \sin\varphi$. Das geht aus dem vorigen Ausdruck durch Division mit $r = |\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}|$ hervor, so daß schließlich das Moment eines Linienteiles X', Y', Z', L', M', N' in Bezug auf eine unbegrenzte den Linienteil X, Y, Z, L, M, N enthaltende Gerade gleich wird:

$$\frac{XL' + YM' + ZN' + LX' + MY' + NZ'}{|\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}|};$$

dieser Ausdruck hängt in der Tat nur von den Verhältnissen der 6 Größen $X \ldots N$ sowie einem ihnen gemeinsamen Vorzeichen ab, so daß er völlig bestimmt ist, wenn nur die unbegrenzte Gerade und eine Richtung auf ihr gegeben ist. Dies Moment eines Linienteiles ist nun genau das, was man in der Statik Drehmoment der durch den Linienteil repräsentierten Kraft um die Gerade als Achse nennt, wobei man nur wiederum (vgl. S. 63) vielfach abweichendes Vorzeichen verwendet.

Wir wollen nun zu dem Momente oder Drehmomente eines Kräftesystemes, einer Dyname $\Xi = \Sigma X_r \ldots$

$N = \Sigma N_r'$ aufsteigen; wir werden darunter naturgemäß die Summe der Momente der Einzelkräfte verstehen, also den Ausdruck:

$$\frac{X \cdot \Sigma L_r' + Y \cdot \Sigma M_r' + Z \cdot \Sigma N_r' + L \cdot \Sigma X_r' + M \cdot \Sigma Y_r' + N \cdot \Sigma Z_r'}{|\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}|}$$

$$= \frac{X \cdot \Lambda + Y \cdot \mathrm{M} + Z \cdot \mathrm{N} + L \cdot \Xi + M \cdot H + N \cdot Z}{|\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}|} .$$

Identifiziert man hierin die unbegrenzte Gerade $X : \ldots : N$ der Reihe nach mit den 3 positiven Achsen, so nimmt der Ausdruck die Werte Λ, M, N an, womit die für diese Größen früher (S. 63) eingeführten Bezeichnungen gerechtfertigt sind.

Nun können wir die oben angegebene Möbiussche Fragestellung angreifen. Eine gegebene Dyname $\Xi \ldots N$ hat in Bezug auf eine Gerade $X : \ldots : N$ das Moment 0 (diese ist Nullachse), wenn

$$\Lambda X + \mathrm{M} Y + \mathrm{N} Z + \Xi L + H M + Z N = 0 ,$$

und also ist das Nullsystem der Dyname die Gesamtheit der durch diese Gleichung dargestellten Geraden $X : \ldots : N$. Das ist aber die allgemeinste lineare homogene Gleichung für die 6 Größen $X \ldots N$, da die Koeffizienten $\Lambda \ldots Z$ als Koordinaten einer Dyname 6 durchaus willkürliche Größen sein können. Genau solche Gesamtheiten gerader Linien, die durch eine willkürliche line-

are homogene Gleichung definiert sind, hat Plücker – neben Möbius der bahnbrechende Pfadfinder in der analytischen Geometrie des 19. Jahrhunderts – in einem Zusammenhange, über den wir später noch ausführlicher zu reden haben werden, unter dem Namen lineare Komplexe der Betrachtung unterworfen. Das Möbiussche Nullsystem ist also mit dem Plückerschen linearen Komplex genau identisch.

Wir wollen uns nun von diesem Nullsystem ein möglichst deutliches Bild zu machen suchen, wobei freilich von einer geometrischen „Gestalt" im eigentlichen Sinne dieses Wortes keine Rede sein kann, da die Nullgeraden den ganzen Raum unendlich oft überdecken; trotzdem wird sich ihre Gruppierung sehr einfach auffassen lassen. Wir wollen dabei, was ganz im Sinne der in dieser Vorlesung immer einzuschlagenden Methode liegt, das Koordinatensystem in eine möglichst bequeme Lage bringen, und das ist erreicht, wenn wir die Zentralachse unserer Dyname als z-Achse wählen. Da die Dyname sich, wie wir wissen, als Summe einer Einzelkraft längs der Zentralachse und eines Kräftepaares mit dazu paralleler Achse darstellt, müssen bei dieser Wahl der z-Achse 4 Koordinaten Ξ, H, Λ, M der Dyname verschwinden, wäh-

und Z die Größe der Einzelkraft, N das Drehmoment des Kräftepaares um seine Achse darstellt. Der Parameter der Dyname ist daher

$$k = \frac{\Xi L + H M + Z N}{\Xi^2 + H^2 + Z^2} = \frac{N}{Z}$$

Die Gleichung des linearen Komplexes hat in diesem neuen Koordinatensystem einfach die Form

$$N Z + Z N = 0$$

oder nach Division durch Z

$$k \cdot Z + N = 0. \qquad (1)$$

Diese Gestalt legen wir der Diskussion zu Grunde. Sind $P_1(x_1|y_1|z_1)$ und $P_2(x_2|y_2|z_2)$ zwei Punkte auf einer Geraden $X : Y : Z : L : M : N$ des Nullsystemes, so ist ja $Z = z_1 - z_2$ und $N = x_1 y_2 - x_2 y_1$ und daher ergibt (1) für die Koordinaten je zweier Punkte einer Nullgeraden die Bedingung:

$$k(z_1 - z_2) + x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0. \qquad (2)$$

Halten wir nun P_2 fest, so ist das eine Gleichung für die Koordinaten x_1, y_1, z_1 aller Punkte P_1, die mit P_2 auf einer Geraden des Nullsystems liegen; schreiben wir der Deutlichkeit halber an Stelle von x_1, y_1, z_1 laufende Koordinaten x, y, z, so erkennen wir, daß alle diese Punkte P_1 eine Ebene mit der Gleichung

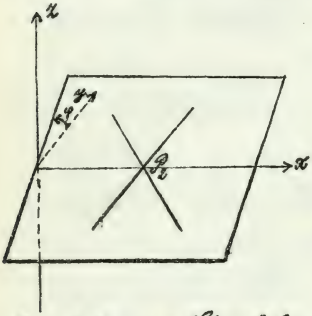
$$y_2 x - x_2 y + k \cdot z = k z_2 \qquad (2')$$

erfüllen. Diese Ebene geht durch den Punkt P_2 selbst hindurch, da die Gleichung für $x = x_2$, $y = y_2$, $z = z_2$ befriedigt wird. Wir haben damit gezeigt, daß durch jeden Raumpunkt P_2 unendlich viele Nullgeraden gehen, die ein die Ebene (2.) erfüllendes ebenes Strahlenbüschel bilden. Unsere Aufgabe wird gelöst sein, wenn wir uns von der Lage dieser jedem Punkte P_2 zugehörenden Ebene ein deutliches Bild machen können.

Nun haben aber die beiden in die Gleichung (3) eingehenden Ausdrücke $V = x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2$, $Z = z_1 - z_2$ die Eigenschaft, bei Parallelverschiebungen des Raumes parallel der z-Achse sowie bei Drehungen um diese ungeändert zu bleiben; denn die Verschiebungen ändern x und y, also auch V gar nicht und lassen die Differenz $z_1 - z_2$ ungeändert, die Drehungen aber betreffen die z-Koordinaten, also auch Z garnicht und lassen V als Flächeninhalt ungeändert. Also wird die Gleichung (2) und daher auch das durch sie bestimmte Nullsystem bei Drehungen des Raumes um die Zentralachse – denn das ist ja die Bedeutung der z-Achse, – und Verschiebungen längs ihr in sich übergeführt.

Dieser Satz erleichtert nun unsere Aufgabe ungemein: Wissen wir nur, welche Ebene im Nullsysteme

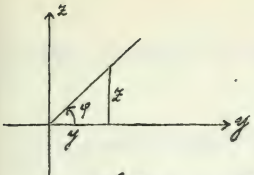
jedem Punkt der positiven x-Halbachse zugehört, so kennen wir damit ganz von selbst auch die jedem beliebigen Raumpunkte zugehörige Ebene; denn durch Verschiebung dieser Halbachse längs der z-Achse und Drehung um sie kann man jeden Raumpunkt mit einem ihrer Punkte zur Deckung bringen, wobei dann nach unserem Satze die im Nullsystem zugehörigen Ebenen ineinander übergehen müssen. Mit anderen Worten: Die Ebenen durch die Punkte eines jeden zur z-Achse senkrechten Halbstrahles haben zu diesem und der z-Achse eine von der speziellen Wahl des Strahles unabhängige Lage.



Indem wir uns nun auf die x-Achse beschränken, setzen wir $y_2 = z_2 = 0$ und erhalten aus (2) als Gleichung der zum Punkte P_2 mit der Abszisse x_2 gehörigen Ebene:

$$k z - x_2 y = 0;$$

diese Ebene geht durch die x-Achse selbst hindurch, da die Gleichung durch $y = z = 0$ identisch befriedigt ist. Indem wir die Gleichung $\frac{z}{y} = \frac{x_2}{k}$ schreiben, schließen wir, daß der Neigungswinkel φ der Ebene gegen die Horizontalebene (y-x-Ebene) die trigono-

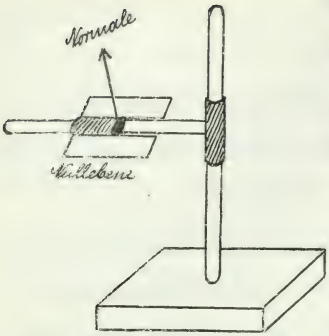


metrische Tangente

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{z_1}{k}$$

hat, und dadurch ist jetzt die Lage unserer Ebene völlig bestimmt; nebenstehend ist ihre Spur in der vertikalen y-z-Ebene gezeichnet.

Wir können das Resultat nach dem oben gesagten bald auch ganz unabhängig vom speziell gewählten Koordinatensystem aussprechen: Zu jedem im Abstande r von der Zentralachse liegenden Punkte gehört im Nullsystem eine das Lot von diesem Punkte auf die Zentralachse enthaltende Ebene, deren Neigungswinkel gegen die Horizontalebene die trigonometrische Tangente $\frac{r}{k}$ hat; bewegt man den Punkt also auf irgend einem zur Zentralachse senkrechten Halbstrahle, so liegt die zugehörige Ebene des Nullsystems für r = 0 selbst horizontal, und richtet sich mit wachsendem r nach der einen oder anderen Seite hin auf (je nachdem $k \gtrless 0$), um für unbegrenzt wachsendes r schließlich asymptotisch sich der vertikalen Lage zu nähern. Ich kann Ihnen diese Verhältnisse an einem Schillingschen Modelle näher erläutern, wo in der Tat an einem beweglichen, um die Zentralachse drehbaren und verschiebbaren Arme ein ebenes Blatt angebracht ist, das bei Verschiebung nach außen



hin sich in richtiger Weise auffindet.

Wir wollen jetzt noch besonders die Normalenrichtung auffassen, die zu der Ebene durch den Punkt P_2 gehört; ihre Richtungscosinus gegen die drei Achsen verhalten sich bekanntlich wie die Koeffizienten der Ebenengleichung (2'), d. h. wie

$$y_2 : (-x_2) : k \qquad (3)$$

Diese selbe Richtung können wir auch dem Punkte P_2 als Bewegungsrichtung einer gewissen unendlich kleinen Schraubenbewegung des Raumes zuordnen. Drehen wir nämlich den ganzen Raum wie einen starren Körper um die z-Achse durch den endlichen Winkel ω und verschieben ihn gleichzeitig parallel der z-Achse um ein Stück c, so sind bekanntlich die Gleichungen dieser endlichen Schraubung:

$$x' = x \cos\omega + y \sin\omega$$
$$y' = -x \sin\omega + y \cos\omega$$
$$z' = z + c$$

Nun nehmen wir ω unendlich klein gleich $d\omega$ und setzen gleichzeitig $c = k \cdot d\omega$; vernachlässigen wir Größen zweiter und höherer Ordnung, so wird $\cos d\omega = 1$, $\sin d\omega = d\omega$

und daher

$$x' = x + y\,dw$$
$$y' = -x\,dw + y$$
$$z' = z + k\,dw.$$

Die Inkremente der Koordinaten eines bestimmten Punktes P_2 bei dieser unendlich kleinen Schraubung sind daher

$$\delta x_2 = y_2 \cdot dw\ ,\quad \delta y_2 = -x_2\,dw,\quad \delta z_2 = k \cdot dw,$$

d. h. er wird in der Richtung

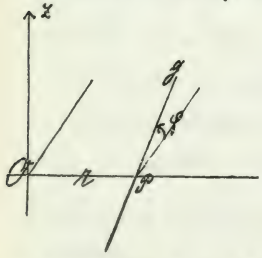
$$\delta x_2 : \delta y_2 : \delta z_2 = y_2 : (-x_2) : k$$

verschoben; das ist in der Tat genau die Normalenrichtung (3). Nimmt man also mit dem Raume eine solche unendlich kleine Schraubung um die Zentralachse vor, daß die Verschiebung das k-fache des Drehwinkels ist, so ist die im Nullsystem mit dem Parameter k zu jedem Raumpunkte gehörige Ebene normal zu dem von ihm durchlaufenen Bogenstück.

Da die Vorstellung der Schraubenbewegung eine sehr anschauliche ist, kann man sich hiernach ein lebendiges Bild von der Anordnung der Ebenen des Nullsystems machen. Je weiter z. B. ein Punkt von der Zentralachse absteht, um so länger ist die Horizontalprojektion $r\,dw$ des Bogenelementes, das er durchläuft, und um so flacher verläuft daher dieses selbst,

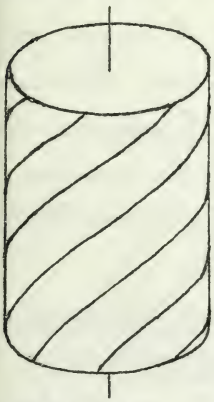
da seine Höhe $k \cdot d\omega$ konstant ist – um so steiler steht daher die zum Bogenelement normale Ebene des Nullsystemes. Setzt man unendlich viele solche unendlich kleine Schraubungen zu einer kontinuierlichen Schraubenbewegung des Raumes zusammen, so durchläuft jeder Punkt in der Entfernung x von der Zentralachse eine Schraubenlinie, deren Neigung gegen die Horizontale die trigonometrische Tangente $-\frac{k}{x}$ hat, und deren Ganghöhe daher stets denselben von x unabhängigen Wert $2k\pi$ hat; die Normalebenen dieser Schraubenlinien sind die Ebenen des Nullsystemes.

Wir wollen uns jetzt zum Schluß, nachdem wir bisher nur von den Ebenen des Nullsystemes gesprochen haben, auch ein unmittelbar anschauliches Bild von den Nullachsen selbst zu machen suchen. Nehmen wir irgend eine Nullachse g und konstruieren ihre kürzeste Entfernung von der Zentralachse, d. i. die gemeinsame Senkrechte, die die Zentralachse in O und g in P treffen möge. Dann gehört PO als senkrechter Halbstrahl von P auf die Zentralachse dem Nullsystem an, und daher muß OPg die zu P gehörige Ebene des Nullsystems sein. Da aber g senkrecht auf PO steht, muß es mit der Horizontalen



derselben Winkel φ bilden, wie jene Ebene des Nullsystemes, d. h. es ist $\operatorname{tg}\varphi = \frac{r}{k}$, wo $r = OP$. Wir erhalten also alle Nullachsen, indem wir durch jeden Punkt P eines jeden auf der Zentralachse senkrechten Halbstrahles dasjenige Lot auf ihm errichteten, dessen Neigungswinkel gegen die Horizontale die trigonometrische Tangente $\operatorname{tg}\varphi = \frac{r}{k}$ besitzt, wo r der Abstand des P von der Zentralachse ist.

Noch ein wenig anschaulicher können wir diese Konstruktion so darstellen: Wir stellen uns den Kreiszylinder mit dem Radius r um die Zentralachse als Achse her und zeichnen auf ihm alle Schraubenlinien, die die aus $\operatorname{tg}\varphi = \frac{r}{k}$ bestimmte Neigung φ gegen die Horizontale haben; dann ist offenbar die Gesamtheit der Tangenten dieser Schraubenlinien identisch mit der Gesamtheit der Nullachsen im Abstand r von der Zentralachse und durch Variation von r erhält man sämtliche



Nullachsen. Diese Schraubenlinien werden nach außen hin offenbar immer steiler; sie haben in jedem Punkte die zugehörige Ebene des Nullsystems zur Schmiegungsebene und verlaufen daher senkrecht zu den vorhin erwähnten Schraubenlinien, die in jedem Punkte normal zu dieser Ebene stehen.

Wir können es nach diesen Erörterungen, die einen doppelten Zusammenhang des Nullsystems mit den Schrauben gelehrt haben, verstehen, daß man diese ganze Theorie auch kurzweg als Schraubentheorie bezeichnet hat; diese Bezeichnung hat besonders Sir Robert Ball in seiner „theory of screws" [1] angewandt, wo er in der Tat alle mit einer gegebenen Dyname an einem starren Körper in Zusammenhang stehenden geometrischen Verhältnisse behandelt.

Lassen Sie uns nun zu unseren systematischen Entwicklungen zurückgehen. Wir hatten nach dem Grassmannschen Prinzip als die 4 geometrischen Elementargebilde des Raumes den Punkt, den Linienteil, den Ebenenteil und den Raumteil erhalten. Genau wie in der Ebene wollen wir nun in einem neuen Abschnitt uns mit der

IV. Klassifikation der Raumgrößen nach ihrem Verhalten bei den rechtwinkligen Koordinatentransformationen

beschäftigen. Dazu müssen wir zunächst alle möglichen Transformationen eines räumlichen rechtwinkligen Koordinatensystems untersuchen; sie sind überhaupt fundamental für die gesamte Raumgeometrie, so daß wir schon deshalb in dieser Vorlesung nicht an ihnen vorbei

[1] A study in the dynamics of a rigid body. Dublin 1876.

gehen können. Die allgemeinste in Betracht kommende Änderung des Koordinatensystems setzt sich wieder zusammen aus 1.) Parallelverschiebung; 2.) Drehung um den Anfangspunkt; 3.) Spiegelung; 4.) Änderung des Maßstabes.

Die Gleichungen der Parallelverschiebung sind natürlich:

$$(A_1) \qquad x' = x + a \qquad y' = y + b \qquad z' = z + c$$

Die Gleichungen der Drehung haben jedenfalls die Form

$$(A_2) \qquad \begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{cases};$$

auf die Bestimmung der Koeffizienten, die hier wesentlich komplizierter ist als in der Ebene, werden wir sogleich besonders eingehen.

Die Spiegelung können wir, wie in der Ebene an einer Achse, so hier an einer Koordinatenebene, etwa der x-y-Ebene, vornehmen, und erhalten:

$$x' = x, \qquad y' = y, \qquad z' = -z.$$

Wir können die Formel aber auch symmetrischer gestalten, indem wir drei Minuszeichen verwenden:

$$(A_3) \qquad x' = -x \qquad y' = -y \qquad z' = -z;$$

das ist eine Spiegelung am Anfangspunkte O selbst, was man auch wohl Inversion nennt: Jeder Punkt P wird

durch den Endpunkt P' der über O hinaus um sich selbst verlängerten Strecke PO ersetzt. In der Ebene stellt $x' = -x$, $y' = -y$ keine Spiegelung, sondern eine Drehung um $180°$ dar, und so ist überhaupt die Inversion am Anfangspunkt nur in Räumen ungerader Dimensionszahl eine Spiegelung, bei gerader Dimensionszahl aber eine Drehung.

Die Maßstabänderung endlich wird einfach durch

$$(A_4) \qquad \begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \lambda y \\ z' = \lambda z \end{cases}, \quad \text{wo } \lambda > 0$$

dargestellt; für $\lambda < 0$ enthält diese Transformation auch eine Spiegelung.

Wir haben uns nun noch mit den Formeln der Drehung näher zu beschäftigen. Die allgemeine Drehung um den Anfangspunkt O hängt bekanntlich von 3 Parametern ab, da einmal die drei Richtungskosinus der Drehungsachse zwei unabhängige Größen repräsentieren und dann der Drehwinkel willkürlich ist. Eine symmetrische Darstellung aller Drehungen durch 3 unabhängige Parameter liefert die Quaternionentheorie, wie ich das in der Vorlesung vom Wintersemester gelegentlich ausgeführt habe; [1] übrigens hat schon Euler die entsprechenden

1) siehe Teil I, S. 166 ff.

Formeln aufgestellt. Hier will ich die Darstellung geben, die man gewöhnlich auch in den Lehrbüchern der Mechanik findet, und die die 9 Richtungscosinus der neuen Achsen gegen die alten benutzt. Wir gehen von der angegebenen Gestalt (A_2) der Transformationsgleichungen aus:

$$(1.) \qquad \begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{cases}.$$

Betrachten wir einen Punkt $x \mid y=0 \mid z=0$ der alten x-Achse, so hat er in Bezug auf das neue System die Koordinaten $x' = a_1 \cdot x$, $y' = a_2 \cdot x$, $z' = a_3 \cdot x$, d. h. a_1, a_2, a_3 sind die Cosinus der Winkel der 3 neuen Achsen gegen die alte x-Achse, und ebenso sind b_1, b_2, b_3 und c_1, c_2, c_3 ihre Richtungscosinus gegen die y- und z-Achse.

Diese neun Koeffizienten der Transformationsgleichungen sind nun durchaus nicht unabhängig von einander. Man kann die Beziehungen zwischen ihnen einmal leicht aus der angegebenen Deutung erhalten, dann aber auch von der Relation aus, die bei jeder „orthogonalen Substitution", d. h. bei Drehung oder Spiegelung mit festbleibendem O besteht:

$$(2) \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

und die die Invarianz der Entfernung von O aussagt; wir

schlagen hier den zweiten Weg ein:

α.) Indem wir also (1) in (2) einsetzen, erhalten wir durch Koeffizientenvergleichung folgende 6 Relationen zwischen den 9 Größen $a_1 \dots c_3$:

$$(3.)\quad \begin{cases} a_1^2+a_2^2+a_3^2=1 & b_1^2+b_2^2+b_3^2=1 & c_1^2+c_2^2+c_3^2=1 \\ b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3=0 & c_1a_1+c_2a_2+c_3a_3=0 & a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0 \end{cases}.$$

β.) Multiplizieren wir nun die drei Gleichungen (1) mit den Größen a bezw. b, bezw. c und addieren, so folgt auf Grund von (3) ihre Auflösung in der Gestalt:

$$(4.)\quad \begin{cases} x = a_1x' + a_2y' + a_3z' \\ y = b_1x' + b_2y' + b_3z' \\ z = c_1x' + c_2y' + c_3z' ; \end{cases}$$

das ist ersichtlich die sog. transponierte lineare Substitution zu (1), die durch Vertauschung von Zeilen und Kolonnen des Koeffizientenschemas entsteht.

γ.) Andererseits ergibt sich nach den Regeln der Determinantentheorie als Lösung der Gleichungen (1)

$$x = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} x' & b_1 & c_1 \\ y' & b_2 & c_2 \\ z' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{etc.}, \quad \text{wo} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

die Determinante des Gleichungssystemes ist. Der Koeffizient von x' hierin muß derselbe sein, wie in (4), d.h.

$$(5.)\quad \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 ,$$

und ebenso muß jeder Koeffizient der orthogonalen Substitution gleich der zugehörigen Unterdeterminante des Koeffizientenschemas, dividiert durch die Determinante Δ sein.

d.) Wir wollen nun diese Determinante Δ des Koeffizientensystems selbst berechnen, und bilden dazu nach dem Multiplikationstheorem der Determinanten ihr Quadrat:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^2+a_2^2+a_3^2, & a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3, & a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3 \\ b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3, & b_1^2+b_2^2+b_3^2, & b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3 \\ c_1a_1+c_2a_2+c_3a_3, & c_1b_1+c_2b_2+c_3b_3, & c_1^2+c_2^2+c_3^2 \end{vmatrix},$$

wobei die Kolonnen der ersten mit den Kolonnen der zweiten Determinante multipliziert sind. Nach den Formeln (3) ist die Produktdeterminante einfach gleich

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

so daß schließlich

$$\underline{\Delta = \pm 1}$$

folgt. Um nun für eine dieser beiden Möglichkeiten zu entscheiden, bedenken wir, daß wir bisher nur die Relation (2) benutzt haben, die bei Drehung und Spiegelung gleichmäßig erfüllt ist. Unter allen diesen orthogonalen Transformationen sind nun die Drehungen dadurch ausgezeichnet, daß sie durch kontinuierliche Variation der Koeffizienten aus der „identischen Trans-

formation $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$ hervorgehen, entsprechend einer stetigen Bewegung des Koordinatensystems aus der ursprünglichen in die neue Lage; demgegenüber entsteht das, was wir allgemein Spiegelung nennen, aus der einen Inversion $x' = -x$, $y' = -y$, $z' = -z$ durch kontinuierliche Abänderung, während sich die Inversion nicht stetig aus der identischen Transformation erzeugen läßt. Nun ist die Determinante eine stetige Funktion der Koeffizienten, und muß sich also stetig ändern, wenn wir die identische Transformation kontinuierlich in irgend eine Drehung überführen; bei dieser Ausgangstransformation hat sie aber den Wert $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +1$, und da sie, wie wir sahen, überhaupt nur $+1$ oder -1 sein kann, muß sie notwendig stets $+1$ bleiben, da ein plötzlicher Uebergang in -1 eine Unstetigkeit bedeuten würde. Bei jeder Drehung ist also die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = +1 , \tag{6}$$

und ganz ebenso ergibt sich, daß bei jeder Spiegelung $\Delta = +1$ ist.

Die Formel (5) nimmt jetzt die einfache Gestalt an

$$a_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} , \tag{7}$$

und so ist jeder Koeffizient im Schema der Drehung des rechtwinkligen Koordinatensystems gleich der zugehörigen Unterdeterminante.

Wir wollen nun zusehen, wie sich die Koordinaten unserer Elementargebilde, des Linienteils X, Y, Z, L, M, N, des Ebenenteiles Λ, M, N, P und schließlich des Raumteiles T (d. i. der Tetraederinhalt) bei unseren vier Arten der Aenderung des rechtwinkligen Koordinatensystemes verhalten. Um Verwechslungen vorzubeugen, mache ich darauf aufmerksam, daß wir Λ, M, N inzwischen in ganz anderer Bedeutung als Koordinaten einer Tyrsame benutzt haben; hier bedeuten sie wieder die dreireihigen Determinanten aus der Koordinatenmatrix dreier Punkte.

Die Transformationsformeln sämtlich hinzuschreiben, würde zu viel Raum beanspruchen und schließlich auch langweilig sein; ich will daher nur einige Punkte hervorheben, die besonderes Interesse verdienen. Zunächst bemerke ich, wie Sie selbst leicht bestätigen werden, daß in allen Transformationsformeln der Koordinaten eines Linienteils die auf das neue System bezogenen Größen X', Y', Z' sich allein durch X, Y, Z ausdrücken, ohne daß die L, M, N eingehen; also muß dem früher (S. 51 f) ausgesprochenen allgemeinen

Prinzip zufolge der Inbegriff der 3 Größen x, y, z bereits für sich ein vom Koordinatensystem unabhängiges, geometrisches Gebilde darstellen: es ist der freie Vektor, den wir ja schon erwähnten (S. 60). Ebenso transformieren sich auch bei der Raumgröße die drei Koordinaten l, M, N für sich, ohne Rücksicht auf die vierte P, so daß auch sie eine geometrische von den Koordinaten unabhängige Bedeutung haben: sie stellen die gleichfalls schon genannte freie Raumgröße dar (S. 61).

Wir wollen nun speziell ausrechnen, wie sich die drei Koordinaten des freien Vektors X, Y, Z bei unseren Transformationen $(A_1) \ldots (A_4)$ (S. 81 f.) verhalten; wir setzen dazu nur in $X' = x'_1 - x'_2$ etc. für die x', die oben aufgestellten Ausdrücke durch x, y, z ein und erhalten dann ohne weiteres:

1.) bei Parallelverschiebung:

$$(B_1) \qquad X' = X \qquad Y' = Y \qquad Z' = Z;$$

2.) bei Drehung:

$$(B_2) \qquad \begin{cases} X' = a_1 X + b_1 Y + c_1 Z \\ Y' = a_2 X + b_2 Y + c_2 Z \\ Z' = a_3 X + b_3 Y + c_3 Z \end{cases};$$

3.) bei Inversion:

$$(B_3) \qquad X' = -X \qquad Y' = -Y \qquad Z' = -Z;$$

4.) bei Maßstabänderung:

$$(B_4) \qquad \underline{X' = \lambda X \quad Y' = \lambda Y \quad Z' = \lambda Z} \,.$$

Bei Verschiebung des Koordinatensystems ändern sich also die Koordinaten des freien Vektors garnicht, sonst aber verhalten sie sich genau wie die Punktkoordinaten selbst.

Damit wollen wir nun die Transformationsformeln für ein Kräftepaar vergleichen, das ist ein Linienteil bei dem speziell $X = Y = Z = 0$ ist. Unter dieser Annahme ergeben sich für die L, M, N folgende Formeln:

1.) Verschiebung:

$$(C_1) \qquad \underline{L' = L \quad M' = M \quad N' = N};$$

2.) Drehung:

$$(C_2) \qquad \underline{\begin{cases} L' = a_1 L + b_1 M + c_1 N \\ M' = a_2 L + b_2 M + c_2 N \\ N' = a_3 L + b_3 M + c_3 N \end{cases}};$$

3.) Inversion:

$$(C_3) \qquad \underline{L' = L \quad M' = M \quad N' = N};$$

4.) Maßstabänderung:

$$(C_4) \qquad \underline{L' = \lambda^2 \cdot L \quad M' = \lambda^2 \cdot M \quad N' = \lambda^2 \cdot N} \,.$$

Die Koordinaten eines Kräftepaares ändern sich also bei Verschiebung des Koordinatensystems und bei Inversion nicht, sie verhalten sich bei Drehung wie Punktkoordinaten und multiplizieren sich bei Maßstabänderung mit dem Faktor λ^2, d. h. sie haben die Dimension 2 (eines Flächeninhalts), während der freie Vektor, wie die Punktkoordina-

sein, die Dimension 1 hat.

Die Herleitung der Formeln (C_1), (C_3), (C_4) macht gar keine Schwierigkeit; nur für (C_2) sind vielleicht einige Erläuterungen angebracht. Man hat nämlich aus den Drehungsformeln (A_2):

$$\mathfrak{L}' = \begin{vmatrix} y_1' & z_1' \\ y_2' & z_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 z_1 & ; & a_3 x_1 + b_3 y_1 + c_3 z_1 \\ a_2 x_2 + b_2 y_2 + c_2 z_2 & & a_3 x_2 + b_3 y_2 + c_3 z_2 \end{vmatrix} .$$

Multiplizieren wir die letzte Determinante aus, so ergeben sich $3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 18$ Glieder, von denen sich offenbar dreimal je 2 $(a_2 x_1 \cdot a_3 x_2 - a_3 x_1 \cdot a_2 x_2$ et c.$)$ gegenseitig fortheben; die überbleibenden 12 Terme fassen sich zu folgender Summe von Determinantenprodukten zusammen:

$$\mathfrak{L}' = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} .$$

Die ersten Faktoren sind nach der Formel (7) für die Unterdeterminanten des Koeffizientensystems einer Drehung (S. 86) gerade gleich a_1, b_1, c_1, während die zweiten Faktoren gleich $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ sind; damit ist in der Tat die angegebene Formel für $\mathfrak{L}'$ gewonnen, und ebenso folgen die beiden andern Formeln für $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{N}'$.

Als drittes Objekt ziehen wir endlich die <u>freie Flächengröße</u> heran; ganz ähnliche einfache Rechnungen, die ich Ihnen wohl selbst überlassen kann, führen zu

dem Ergebnis, daß sich die Komponenten Λ, M, N der freien Raumgröße in allen Fällen genau so wie die Koordinaten L, M, N eines Kräftepaares transformieren.

Fassen wir der besseren Uebersicht halber diese Ergebnisse in eine kleine Tabelle zusammen; sie gibt die transformierten ersten Koordinaten an, aus denen die anderen durch zyklische Vertauschung entstehen:

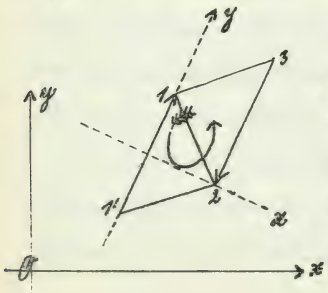
	Verschiebung	Drehung	Inversion	Maßstabänderung
freier Vektor	X	$a_1 X + b_1 Y + c_1 Z$	$-X$	λX
Kräftepaar	L	$a_1 L + b_1 M + c_1 N$	L	$\lambda^2 L$
freie Raumgröße	Λ	$a_1 \Lambda + b_1 M + c_1 N$	Λ	$\lambda^2 \Lambda$

Damit haben wir nun die präzise Grundlage für eine Reihe geometrischer Aussagen gewonnen, die in den Lehrbüchern vielfach garnicht oder doch nur beiläufig und in einer Form herauskommen, in der man ihren einfachen geometrischen Inhalt nicht so leicht auffassen kann. Häufig werden die verschiedenen geometrischen Gebilde, die wir hier betrachten, durchaus nicht in dieser reinlichen Weise getrennt, wie wir es für erforderlich halten, und daher fallen dann eine ganze Reihe interessanter Beziehungen vollkommen fort. So sind z. B. schon bei Poinsot die Begriffe Kräftepaar („couple") und freie Raumgröße („axe") stets von vornherein mit einander verkoppelt, was natürlich das Verständnis notwendig erschwert; für uns hier zeigt erst

der Vergleich der letzten beiden Zeilen unserer Tabelle nach einem früher ausgesprochenen allgemeinen Prinzip, daß Kräftepaar und freie Raumgröße als geometrische Grundbegriffe derselben Art anzusehen sind; weil sie sich bei allen Aenderungen des rechtwinkligen Koordinatensystems genau übereinstimmend verhalten. Machen wir uns den Inhalt dieser Aussage näher klar: Ist etwa ein Kräftepaar $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ gegeben und ordnen wir ihm eine Raumgröße Λ, M, N durch

$$\Lambda = \mathfrak{L}, \qquad M = \mathfrak{M}, \qquad N = \mathfrak{N}$$

zu, (oder machen wir dasselbe in umgekehrter Reihenfolge, von Λ, M, N ausgehend), so bleibt diese Uebereinstimmung der Koordinaten bei jeder Koordinatentransformation erhalten und muß sich daher auch rein geometrisch ohne Benutzung des Koordinatensystemes beschreiben lassen. Zu diesem Ende wollen wir von der Raumgröße Λ, M, N ausgehen und werden nun am Bequemsten das Koordinatensystem so spezialisieren, daß $\Lambda = M = 0$ wird; dann stellt die freie Raumgröße ein parallel der x–y–Ebene oder speziell in ihr liegendes Dreieck $(1, 2, 3)$ dar, derart daß N gleich dem doppelten Dreiecksinhalt d. h. gleich dem Inhalte des Parallelogramms



$(1, 1', 2, 3)$ wird, das mit dem durch diesen Umlaufssinn bestimmten Vorzeichen zu versehen ist. Ich behaupte nun, daß das zugehörige Kräftepaar mit den Momenten $L = 0$, $M = 0$, $N = N$ aus zwei gegenüberliegenden Parallelogrammseiten $(1, 1')$ und $(2, 3)$ mit den Pfeilspitzen in 1 und 2 zusammengesetzt werden kann. Zum Beweise lege ich das Koordinatensystem in der x–y-Ebene noch bequemer, nämlich die y-Achse in die Gerade 1 1' und die x-Achse durch den Punkt 2 (in der Figur punktiert gezeichnet). Dann haben zunächst die beiden Linienteile $(1, 1')$ und $(2, 3)$ und daher auch das aus ihnen zusammengesetzte Kräftepaar die Drehmomente $L = 0$ und $M = 0$. Ferner ist für den Linienteil $(1, 1')$ auch das dritte Drehmoment Null, so daß schließlich N gleich dem Drehmoment von $(2, 3)$ wird:

$$N = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = x_2 \cdot y_3 ,$$

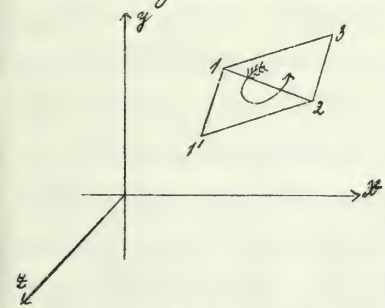
da nach unserer Annahme $x_2 = x_3$ und $y_2 = 0$ ist. Dieser Wert (Grundlinie y_3 mal Höhe x_2) ist tatsächlich dem Inhalt unseres Parallelogrammes gleich, und auch das Vorzeichen stimmt zu den obigen Festsetzungen, da nach unseren Annahmen sich unmittelbar $N = \begin{vmatrix} 0 & y_3 & 1 \\ x_2 & 0 & 1 \\ x_2 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = x_2 \cdot y_3$ erweist; damit ist tatsächlich $N = N$, und unsere ganze Behauptung ist bewiesen.

Wir können nun das Resultat sofort auch allge–

mein ohne Rücksicht auf ein spezielles Koordinatensystem aussprechen: Eine durch ein Parallelogramm von bestimmtem Umlaufssinne repräsentierte freie Maßgröße, sowie das Kräftepaar, das aus zwei gegenüberliegenden Parallelogrammseiten mit je einer jenem Umlaufssinne entgegen gerichteten Pfeilspitze besteht, sind geometrisch aequivalente Größen, d. h. sie haben in Bezug auf jedes Koordinatensystem gleiche Komponenten. Dieser Satz gestattet also sowohl ein Kräftepaar durch ein Parallelogramm, als auch ein solches durch ein Kräftepaar jederzeit zu ersetzen.

Wir brauchen uns jetzt um die zweite Zeile unserer Tabelle (S. 91) nicht mehr zu kümmern und wollen die erste und dritte, also freien Vektor und freie Maßgröße vergleichen. Da sehen wir zuerst, daß beide sich bei Verschiebungen und Drehungen genau gleich verhalten, daß aber ein Unterschied auftritt, sowie wir Spiegelungen oder gar Maßstabänderungen hinzunehmen. Um das im einzelnen zu verfolgen, denken wir in dem uns geläufigen (rechtshändigen) Koordinatensystem eine Maßgröße Λ, M, N gegeben und koppeln mit ihr einen freien Vektor durch die Gleichungen $X = \Lambda, Y = M, Z = N$; diese Gleichungen werden zwar bestehen bleiben, wenn wir uns auf Bewegungen des Koordinatensystems beschränken, aber bei Spiegelungen oder Maßstabänderungen werden

sie sich modifizieren, und wenn wir sie geometrisch aussprechen wollen, werden wir daher ohne Benutzung des Sinnes des Koordinatensystems und des Maßstabes nicht auskommen. In der Tat, legen wir das Koordinatensystem wieder wie oben so, daß $A = M = 0$, und daß N gleich dem Inhalt des Parallelogrammes (1, 1', 2, 3) der x–y–Ebene wird, bei den Verhältnissen der Figur ist dann $N > 0$. Der Vektor $\mathfrak{x} = 0$, $\mathfrak{y} = 0$, $\mathfrak{z} = N$ hat dann die positive Richtung der z–Achse. Das kann man unabhängig von Bewegungen des Koordinatensystems offenbar so aussprechen: Um den einer freien Plangröße bei rechtshändigem Koordinatensystem zugehörigen freien Vektor zu erhalten, errichte man in ihrer Ebene ein Lot nach der Seite, von der aus die Umlaufsrichtung des repräsentierenden Parallelogrammes dem Uhrzeiger entgegen gerichtet erscheint, und trage auf ihm eine Strecke gleich dem Inhalt des Parallelogrammes ab. Diese Zuordnung, die bei allen Verschiebungen und Drehungen der Koordinaten erhalten bleibt, hört bei Maßstabänderung und Inversion auf; mißt man z. B. in Dezimetern statt vorher in Zentimetern, so geht die Maßzahl des Inhalts in ihren 100ten Teil über, die



Maßzahl der als Vektor abgetragenen Strecke aber nur in ihren 10ten Teil, so daß die Uebereinstimmung aufhört; und ebenso wird bei Inversion der Vektor das Vorzeichen wechseln, nicht aber die Flanzgröße.

Die freie Flangröße und Vektor kann man also nur dann völlig identifizieren, wenn man sich ein für alle Male auf einen bestimmten Sinn des Koordinatensystems und eine bestimmte Längeneinheit festlegt; eine solche Beschränkung bleibt natürlich jedem einzelnen für seinen Gebrauch unbenommen, nur muß er ihrer Willkürlichkeit sich immer bewußt bleiben, um sich mit anderen verständigen zu können. Alle diese Dinge sind äußerst klar und einfach, doch muß man sie so deutlich aussprechen, da in der heutigen Physik die historische Entwicklung vielfach eine gewisse Verwirrung zurückgelassen hat. Ein Wort daher noch über die Geschichte dieser Sachen.

Grassmanns Ausdehnungslehre von 1844 hat wegen ihrer schon hervorgehobenen schwer lesbaren Darstellung auf unsere Physik und Mechanik sehr wenig eingewirkt. Viel mehr Einfluß hat da über England die von Hamilton in Dublin um dieselbe Zeit inaugurierte Entwicklung gewonnen; Hamilton ist der Erfinder der Quaternionen, über die ich in der Wintervor-

lesung ja ausführlich gesprochen habe.[1] Hier brauche ich nur zu erwähnen, daß er auch das Wort Vektor geschaffen hat für das, was wir freier Vektor nannten, während er den Begriff des linienflüchtigen Vektors nicht ausdrücklich hat. Ferner aber kennt er keinen Unterschied zwischen freier Raumgröße und freiem Vektor, indem er eben von vornherein eine bestimmte Festsetzung über Sinn und Maßstab getroffen denkt. Dieser Gebrauch ist nun in die Physik übergegangen, und man hat lange Zeit die eigentliche Vektoren und Raumgrößen nicht unterschieden. Freilich machte sich allmählich bei feineren Untersuchungen doch die Notwendigkeit einer Scheidung je nach dem Verhalten der gleichmäßig als Vektoren bezeichneten Gebilde bei Inversionen geltend, und dazu hat man denn die Adjektive „polar" und „axial" benutzt: Ein polarer Vektor ändert sein Vorzeichen bei Spiegelungen, ist also genau mit unserem freien Vektor identisch, ein axialer ändert es nicht, und stimmt daher mit unserer freien Raumgröße überein, (wobei wir auf die „Dimension" nicht achten). Die Physik mußte also hier — und sie tut es noch heute in den üblichen Darstellungen — hinterher eine gewissermaßen überraschende Unterscheidung konstatieren, die sich bei unserer Auffassung aus dem Grassmannschen

[1] siehe Teil I, S. 144 ff.

Prinzip ganz naturgemäß von vornherein ergibt. Um es zum Schluß noch ganz präzise an einem Beispiele auszusprechen: Die Aussage, daß die elektrische Erregung ein polarer Vektor ist, bedeutet, daß sie durch 3 Größen X, Y, Z gemessen wird, die sich nach der ersten Zeile unserer Tabelle (S. 91) transformieren; und daß die magnetische Kraft ein axialer Vektor ist, soll besagen, daß ihre 3 Bestimmungsstücke sich nach dem Schema der letzten Zeile der Tabelle substituieren. Dabei lasse ich freilich noch dahingestellt, wie es mit der Dimension dieser Bestimmungsstücke steht, denn das würde uns zu weit in die Physik hineinführen.

Hamilton hat nun neben dem Worte Vektor auch das Wort <u>Skalar</u> geschaffen, das noch heute gleichfalls in der Physik eine große Rolle spielt. <u>Ein Skalar ist nichts als eine Invariante aller unserer Koordinatentransformationen, d. i. eine Größe, die bei ihnen ungeändert bleibt.</u> Dabei muß man wieder genau sagen, welche Transformationen man zulassen will, und danach kann man verschiedene Schattierungen des Skalarbegriffes unterscheiden. Betrachten wir zuerst als Beispiel den <u>Raumteil oder Tetraederinhalt</u>

$$T = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix};$$

er geht, wie man leicht durch Rechnung bestätigt

bei	Verschiebung	Drehung	Inversion	Maßstabänderung
über in	T	T	$-T$	$\lambda^3 \cdot T$

Eine solche Größe, die bei Verschiebungen und Drehungen ungeändert bleibt, bei Spiegelung aber ihr Vorzeichen ändert, nennt man einen Skalar zweiter Art, während ein Skalar erster Art auch bei Inversion absolut ungeändert bleiben soll. Dabei ist die aus der vierten Volumen sich ergebende Dimension wieder bei Seite gelassen.

Wir können nun leicht auch Skalare erster Art bilden; die einfachsten Beispiele sind $x^2+y^2+z^2$, wo x, y, z die Koordinaten eines freien Vektors sind, und $\Lambda^2+M^2+N^2$, wo Λ, M, N die Koordinaten einer freien Raumgröße sind. Daß diese Größen in der Tat bei allen Bewegungen und Spiegelungen (nicht bei Maßstabänderungen) ungeändert bleiben, ist aus der Tabelle von S. 91 sofort zu entnehmen, wenn wir noch die Gleichungen (3) (S. 84) für die Koeffizienten der Drehung berücksichtigen; es muß ihnen daher auch eine rein geometrische Bedeutung zukommen, und wir wissen in der Tat, daß sie das Quadrat der Länge des Vektors bezw. des Flächeninhalts des Ebenenteiles darstellen.

Wir wollen nun zusehen, wie man durch Kombinationen aus gegebenen Grundgebilden, Vektoren und Skalaren beider Arten, weitere Gebilde derselben Gattungen gewinnen kann. Zunächst ein ganz einfaches Beispiel: T sei ein Skalar zweiter Art, also etwa ein Tetraederinhalt, und x, y, z seien die Koordinaten eines polaren Vektors; wir betrachten das Größentripel $T.x,\ T.y,\ T.z$. Bei Bewegungen werden sich diese 3 Größen genau so transformieren, wie die Vektorkomponenten x, y, z selbst; bei Inversion aber bleiben sie ungeändert, da beide Faktoren das Zeichen wechseln. Also stellen die 3 Größen einen axialen Vektor dar, und gerade so erkennt man, daß man von einem axialen Vektor A, M, N ausgehend einen polaren $T.A,\ T.M,\ T.N$ erhält.

Nun wollen wir 2 polare Vektoren x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 vornehmen und allerlei charakteristische Kombinationen aus ihnen bilden, wobei wir zunächst rein analytisch verfahren: Wir untersuchen das Verhalten der neu gebildeten Größen bei Koordinatentransformationen und schließen daraus, was für eine Art geometrischer Größen sie vorstellen.

1.) Wir beginnen mit den 3 Summen:

$$x_1 + x_2,\quad y_1 + y_2,\quad z_1 + z_2;$$

sie transformieren sich offenbar genau so, wie die Vektor-Komponenten selbst, und stellen daher einen neuen polaren Vektor dar, der mit jenen beiden gegebenen Vektoren in einer vom Koordinatensysteme unabhängigen rein geometrischen Beziehung steht.

2.) Die bilineare Kombination beider Vektorkomponenten

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

bleibt, wie die Rechnung ergibt, bei allen Bewegungen und Spiegelungen ungeändert, und stellt also einen Skalar erster Art vor, der als solcher wiederum rein geometrisch sich definieren lassen muß.

3.) Die 3 Unterdeterminanten der aus den Komponenten gebildeten Matrize

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

verhalten sich, wie leicht auszurechnen, genau wie die Koordinaten einer freien Flächengröße oder eines axialen Vektors, der gleichfalls unabhängig vom Koordinatensystem mit den gegebenen Vektoren verknüpft sein muß.

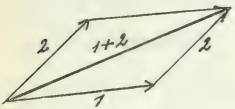
4.) Wir betrachten endlich 3 Vektoren und bilden aus ihren 9 Komponenten die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} ;$$

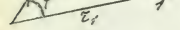
sie bleibt bei allen Bewegungen ungeändert, wechselt aber bei Spiegelungen das Vorzeichen, so daß sie einen Skalar zweiter Art definiert.

Ich gebe nunmehr die geometrische Deutung dieser Gebilde an; die Beweise werden Sie sich leicht selbst ergänzen können, nachdem einmal das Resultat ausgesprochen ist, wenn Sie nur immer von passend spezialisierter Lage des Koordinatensystemes ausgehen.

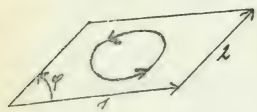
Zu 1.) Die Deutung der hier definierten sog. Summe der beiden Vektoren ist allbekannt, sie stellt die mit bestimmtem Sinne genommene Diagonale des von beiden Vektoren gebildeten Parallelogrammes dar, wie die Figur zeigt (Regel vom „Kräfteparallelogramm").



Zu 2.) Haben die Vektoren die Länge r_1, r_2 und bilden sie, wenn man sie an einen Punkt versetzt denkt, den Winkel φ, so ist jene bilineare Kombination gleich $r_1 r_2 \cos\varphi$.

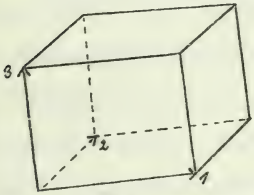


Zu 3.) Wir betrachten das Parallelogramm, dessen Seiten den Vektoren 1 und 2 parallel sind, und denken es in dem durch die Aufeinanderfolge der Sinne der Vektoren 1 und 2 gegebenen Sinne umlaufen; so hat man eine vollständig bestimmte freie Flächengröße, und das ist gerade die



oben durch ihre drei Koordinaten definierte. Uebrigens ist der absolute Betrag ihres Flächeninhaltes durch $x_1 \cdot x_2 \mid \sin \varphi \mid$ gegeben.

Zu 4.) Verlegt man die 3 Vektoren an einen Punkt, so bilden sie 3 Kanten eines Parallelepipeds; sein Inhalt – mit einem geeignet bestimmten Vorzeichen – wird jenem durch die Determinante definierten Skalar zweiter Art gleich.



Lassen Sie mich nun davon sprechen, in welcher Form diese Prozesse sonst in der Literatur auftreten, wo man nicht, wie wir es hier tun, die Untersuchung des Verhaltens gewisser analytischer Ausdrücke gegenüber Koordinatentransformationen, d. h. eine rationelle und einfache Invariantentheorie an die Spitze stellt. Man hat da in der Mechanik und Physik eine besondere Sprechweise ausgebildet, die sog. Vektoralgebra und Vektoranalysis; man vergleicht nämlich, wie das Grassmann und Hamilton eingeleitet haben, jene Verbildung von Vektoren und Skalaren aus gegebenen Vektoren mit den elementaren Rechenoperationen mit gewöhnlichen Zahlen.

Das erste ist, wie schon angedeutet, daß man die unter Nr. 1 aufgeführte Operation schlechtweg

als Addition der beiden Vektoren 1 und 2 bezeichnet. Die Berechtigung dieser Benennung findet man in der Gültigkeit gewisser formaler Gesetze, die die Addition der gewöhnlichen Zahlen charakterisieren, so insbesondere des Kommutativen und assoziativen Gesetzes: Ersteres sagt hier aus, daß die Reihenfolge der Vektoren 1, 2 für ihre Summe gleichgültig ist, letzteres, daß die Addition der Summe von 1 und 2 zu einem Vektor 3 dasselbe ergibt, wie die Addition von 1 zur Summe von 2 und 3. — In sehr viel freierer Weise hat man die unter 2 und 3 definierten Operationen Multiplikation genannt und zwar unterscheidet man sie als innere oder skalare (Nr. 2) und äußere oder vektorielle (Nr. 3) Multiplikation. Hier trifft nämlich die wichtige Eigenschaft zu, die man als Distributivität der Multiplikation in Bezug auf die Addition bezeichnet, und die in der Gleichung $x_1 (x_2 + x_3) = x_1 x_2 + x_1 x_3$ enthalten ist; in der Tat hat man ja für die innere Multiplikation

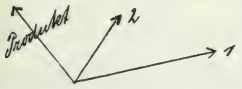
$$x_1 (x_2 + x_3) + y_1 (y_2 + y_3) + z_1 (z_2 + z_3) = (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) + (x_1 x_3 + y_1 y_3 + z_1 z_3),$$

und ähnlich einfach ist die analoge Eigenschaft für die äußere Multiplikation zu zeigen. Was die anderen formalen Gesetze der Multiplikation angeht, — ich habe in der letzten Wintervorlesung [1] ausführlich von ihnen gehandelt —, so will

1) s. Teil I, pag. 22.

ich nur noch erwähnen, daß für die innere Multiplikation auch das Kommutative Gesetz gilt ($a.b = b.a$), für die äußere aber nicht; denn die kleinen Determinanten der definierenden Matrix wechseln bei Vertauschung der Vektoren 1 und 2 ihr Vorzeichen.

Ich möchte hier noch bemerken, daß man vielfach das äußere Produkt zweier polarer Vektoren schlechtweg als „Vektor" definiert, ohne seinen axialen Charakter hinreichend zu betonen. Natürlich können wir auch sofort auf Grund der oben (S. 95) gegebenen allgemeinen Erwerbung die freie Raumgröße durch einen Vektor ersetzen und erhalten folgende Regel: Das äußere Produkt zweier Vektoren 1 und 2 ist ein Vektor 3 von der Länge $r_1 r_2 . |\sin\varphi|$, der auf der Ebene von 1 und 2 senkrecht steht und so



gerichtet ist, daß 1 zu 2 zu 3 liegt, wie die positive x-, y-, und z-Achse. Man darf aber keinesfalls vergessen, daß diese Definition von der Art des Koordinatensystems und dem Maßstab ganz wesentlich abhängt.

Warum sich diese Sprechweise der Vektoranalysis so eingebürgert hat, kann ich nicht ganz verstehen; es mag aber wohl darauf zurückzuführen sein, daß vielen Leuten solche formale Analogieen mit den gewöhnlichen von altersher üblichen Rechenoperationen großes Ver-

genügen machen. Jedenfalls sind diese Namen für die Vektoroperationen wenigstens leidlich allgemein angenommen; was aber eine weitgehende Divergenz der Meinungen hervorgerufen hat, das ist die Festlegung einer bestimmten symbolischen Schreibweise für diese Operationen und insbesondere für die verschiedenen Arten der Multiplikation. Ich habe Ihnen schon in der vorhergehenden Vorlesung [1] erzählt, wie weit man trotz aller Bemühungen hier von einer Einigung entfernt ist. Unterdessen hat man auf dem Mathematikerkongreß in Rom gar eine internationale Kommission eingesetzt, die eine einheitliche Bezeichnungsweise vorschlagen soll; aber ob innerhalb der Kommission überhaupt eine Einigung zu Stande kommen wird, und ob dann die Gesamtheit der Mathematiker solche Vorschläge auch annehmen wird, das muß man erst abwarten. Es ist nun einmal ungeheuer schwer, eine größere Zahl einzelner Menschen, die nur möglichst bequem ihrer Gewohnheit folgen wollen, unter einen Hut zu bringen, wenn nicht die zwingende Gewalt einer Legislative oder materieller Interessen dahinter steht. – Ich ziehe es hier vor, von der Bezeichnungsweise der Vektoranalysis garnicht zu reden – sonst schaffe ich unversehens noch

1) Teil I, pag. 157.

eine neue!

Ich möchte diesen Exkurs nicht abschließen, ohne darauf hinzuweisen, daß für unseren allgemeinen Standpunkt (Voranstellung des Grassmannschen Prinzipes der Definition neuer Gebilde durch Determinantenbildung aus Punktkoordinaten und feinere Klassifikation derselben nach dem Verhalten bei Koordinatentransformationen) die Fragestellungen der gewöhnlichen Vektoranalysis nur einen Ausschnitt darstellen aus einer Fülle allgemeiner Probleme. Denn z. B. die linienflüchtigen Vektoren, die gebundenen Raumgrößen, die Schrauben und Dynamen finden in der Vektoranalysis zunächst keine Berücksichtigung. — Was Literatur dieses Gesamtgebietes anlangt, so möchte ich noch zum Schluß meine eigene Arbeit: „Zur Schraubentheorie von Sir Robert Ball" [1] sowie die einschlägigen Encyklopaediereferate von E. Timerding („Geometrische Grundlegung der Mechanik eines starren Körpers" Enc. IV, 2) und M. Abraham („Geometrische Grundbegriffe der Mechanik deformierbarer Körper" Enc. IV, 14) nennen.

V. Erzeugnisse der Grundgebilde.

Damit wäre das beendet, was ich hier über geometrische

1) Zeitschr. f. Math. u. Phys. 47, pag. 237 f. f. und Math. Ann. 62 pag. 419.

Grundgebilde sagen wollte, und es wäre nun über die höheren Gebilde zu reden, die sich aus ihnen zusammensetzen lassen. Ich will das in historischer Form tun, damit Sie ein gewisses Bild der Entwicklung der Geometrie in den verschiedenen Jahrhunderten bekommen:

A.) Bis zum Ende des 18. Jahrhunderts benutzte man als Elementargebilde im wesentlichen nur Punkte, andere kamen wohl gelegentlich, nie aber systematisch vor. Als Erzeugnisse von Punkten betrachtete man Kurven und Flächen sowie allgemeinere aus Stücken verschiedener Kurven und Flächen bestehende Konfigurationen. Lassen Sie uns überlegen, wie mannigfach das damit bezeichnete Gebiet ist:

1.) Im elementaren Unterricht und manchmal auch in der Anfangsvorlesung über analytische Geometrie sieht es so aus, als ob sich die ganze Geometrie auf Gerade, Ebene, Kegelschnitte und allenfalls Flächen zweiter Ordnung beschränkte. Natürlich ist das ein recht ärmlicher Standpunkt, und schon das Wissen der alten Griechen erstreckte sich zum Teil weiter auf einzelne höhere Kurven, die sie als „geometrische Örter" betrachteten; freilich war das bei ihnen wohl noch nicht in den regulären Unterricht eingedrungen.

2.) Vergleichen wir damit den Stand der Kunst-

bis um 1650, als die analytische Geometrie mit Fermat und Descartes einsetzte. Man unterschied damals geometrische und mechanische Kurven; erstere waren besonders Kegelschnitte, aber auch einzelne höhere Kurven der Art, die man heute algebraische Kurven nennt; mit der zweiten Benennung meinte man Kurven, die man durch irgend einen Mechanismus definierte, z. B. Zykloiden, die durch das Abrollen eines Rades entstehen; sie fallen unter unsere „transzendenten Kurven".

3.) Beide Arten von Kurven ordnen sich dem Begriff der analytischen Kurve unter, den man später allgemein aufstellte; das sind Kurven, deren Koordinaten x, y sich als analytische Funktionen eines Parameters t, d. h. kurzweg als Potenzreihen in t darstellen lassen.

4.) Neuerdings hat man vielfach Betrachtungen über nichtanalytische Kurven angestellt, deren Koordinaten $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ sich nicht mehr als Potenzreihen entwickeln lassen, z. B. Funktionen ohne Differentialquotienten sind; hiermit ist dann ein allgemeinerer Kurvenbegriff gegeben, von dem jene analytischen Kurven nur ein besonders einfacher Spezialfall sind.

5.) Endlich ist in neuester Zeit durch die Entwicke-

lung der Mengenlehre, von der wir ja im vorigen Semester [1] sprachen, noch ein früher gar nicht gekanntes Objekt hinzugetreten, nämlich die Punktmengen. Das sind Gesamtheiten von unendlich vielen Punkten, Punkthaufen, die nicht gerade eine Kurve bilden, aber doch durch ein bestimmtes Gesetz definiert sind. Sie bieten ein Bild, wie etwa die Milchstraße des Sternhimmels, in der man ja, je genauer man hinsieht, immer mehr Sterne erblickt; nur handelt es sich natürlich bei den Punktmengen um exakt unendlich viele Punkte.

Für die hiermit bezeichneten Gebiete, z. B. die sog. Infinitesimalgeometrie, die Punktmengenlehre wird im Rahmen dieser Vorlesung leider kein Raum mehr bleiben, obgleich sie natürlich gleichfalls wichtige Teilgebiete der Geometrie sind. Sie werden ja in besonderen Vorlesungen und Büchern häufig eingehend gelehrt, so daß wir uns hier mit diesem Hinweis auf ihre Stellung zum Gesamtgebiet der Geometrie begnügen können, um uns ausführlicher lieber mit anderwärts seltener behandelten Dingen beschäftigen zu können.

Vorher knüpfte ich an diese Aufzählung gern eine Erörterung über den Unterschied zwischen analytischer und synthetischer Geometrie, der ja in die Darstellung

1) vgl. Teil I, S. 546 ff.

jener Gebiete immer wieder hineinspielt. Ursprünglich sind Synthese und Analyse verschiedene Arten der Darstellung: Die Synthese beginnt mit den Einzelheiten und setzt daraus allgemeinere und schließlich allgemeinste Begriffe zusammen, die Analyse im Gegenteil stellt das Allgemeinste an die Spitze und zergliedert es feiner und immer feiner in seine Einzelheiten. Genau in diesem Sinne ist der Unterschied auch in den Bezeichnungen synthetische und analytische Chemie verstanden. Auch in Schulgeometrie redet man entsprechend von einer Analysis geometrischer Konstruktionen: Man nimmt da an, das gesuchte Dreieck sei gefunden und zergliedert es nun in seine einzelnen Stücke. In der höheren Mathematik haben diese Worte aber merkwürdiger Weise einen ganz anderen Sinn angenommen: Da ist die synthetische Geometrie die, die die Figuren als solche ohne Hinzunahme von Formeln studiert, während die analytische Geometrie sich konsequent der Formeln, speziell des x – y – Koordinatensystems bedient. Richtig verstanden aber besteht freilich zwischen beiden Arten von Geometrie nur ein gradueller Unterschied, je nachdem man mehr die Formeln oder mehr die Figuren voranstellt; analytische Geometrie, die ganz von geo-

metrischer Vorstellung abstrahiert, kann man kaum mehr Geometrie nennen, und die synthetische Geometrie kommt nicht weit, wenn sie nicht zum präzisen Ausdruck ihrer Resultate eine zweckmäßige Formelsprache heranzieht. Nach dieser Erkenntnis haben wir im vorigen gehandelt, wenn wir von Anfang an die Formeln benutzten, und dann nach ihrer geometrischen Deutung fragten.

Doch auch in der Mathematik zeigen, wie überall, die Menschen zur Parteibildung, und so entstanden Schulen reiner Synthetiker und reiner Analytiker, die auf absolute „Reinheit der Methode" den Hauptwert legten, und die also einseitiger waren, als es die Natur der Sache verlangt. Da verloren sich denn die analytischen Geometer oft in ein blindes Rechnen ohne alle geometrischen Vorstellungen, während die Synthetiker in einer gekünstelten Vermeidung jeder Formel alles Heil sahen, und dabei doch schließlich nichts taten, als daß sie eine eigene von der gewöhnlichen abweichende Formelsprache entwickelten. Solche Uebertreibungen der zu Grunde liegenden sachlichen Prinzipien in wissenschaftlichen Schulen führen alleweil zu einem gewissen Versteinerungsprozess und eine neue, die Wissenschaft wesentlich weiter fördernde Anregung kommt dann meist von „Outsidern". So haben hier in der Geometrie

erst die Funktionentheoretiker z. B. den Unterschied zwischen analytischen und nicht nichtanalytischen Kurven klar herausgebracht, der weder bei den wissenschaftlichen Vertretern, noch bei den Lehrbüchern beider Schulen jemals hinreichend zur Geltung kam. Und ebenso haben erst die Physiker die Vektoranalysis recht in den Gang gebracht, wenn sich auch die Grundbegriffe schon bei Grassmann finden; ist doch in geometrischen Lehrbüchern heute noch von Vektoren als selbständiger Disziplin kaum die Rede!

Man hat dafür plädiert, die Geometrie als selbständigen Lehrgegenstand von der Mathematik abzutrennen, überhaupt letztere in einzelne Disziplin zu gliedern; in der Tat hat man besonders in ausländischen Universitäten eigene Professuren für Geometrie, Algebra, Differentialrechnung etc. geschaffen. Ich möchte aus den letzten Erörterungen gerade die Folgerung ziehen, daß sich die Aufrichtung so enger Schranken nicht empfiehlt, sondern daß nach Möglichkeit eine lebendige Wechselwirkung der verschiedenen in einer Wissenschaft zusammenwirkenden Interessenzweige zugelassen werden soll, indem jeder einzelne sich im Prinzip als Vertreter der gesamten Mathematik fühlt. Ich rede sogar noch weiterhin möglichst lebendigen Beziehungen der Mathematiker zu den Vertretern der verschiedensten anderen

Wissenschaften das Wort.

Beenden wir damit diesen Exkurs und Betrachten, der geschichtlichen Entwicklung weiter nachgehend

B. den gewaltigen Impuls, den die geometrische Forschung von 1800 an erhielt, wo die sog. neuere Geometrie in den Vordergrund trat. Wir nennen sie heut lieber projektive Geometrie, da die Operation des Projizierens – wir werden später ausführlich von ihr zu reden haben – eine Hauptrolle spielt; die Bezeichnung „neuere" ist zwar heute noch vielfach im Gebrauche, aber eigentlich natürlich längst veraltet, da seither viele wiederum „neuere Tendenzen dazu gekommen sind. Als den ersten bahnbrechenden Forscher habe ich hier Poncelet zu nennen, der 1822 seinen „Traité des propriétés projektives des figures" [1] erscheinen ließ.

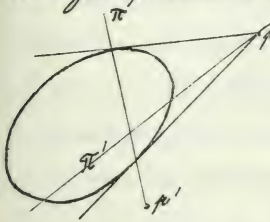
Für der weiteren Entwicklung dieser neueren Geometrie spielte auch wieder von vornherein der Unterschied zwischen synthetischer und analytischer Richtung eine Rolle; als Vertreter der ersteren nenne ich von deutschen Forschern Steiner und v. Staudt, als Vertreter der zweiten neben Möbius vor allem Plücker. Ich lege Ihnen hier gern die Fundamentalwerke auch dieser Männer vor, die ja

1) 2. éd. Paris 1865/66.

heute noch lebendig nachwirken: Es sind Steiners „systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander“ [1] Staudts „Geometrie der Lage“ [2] Möbius „Baycentrischer Calcul“ [3] und endlich Plückers „Analytisch-geometrische Entwicklungen“. [4]

1.) Die Hauptleistung von Poncelet ist wohl, wenn damit zu beginnen, daß bei ihm zum ersten Male neben dem Punkt auch andere Gebilde als gleichberechtigt hervortreten, und zwar wird innerhalb der Ebene dem Punkte die unbegrenzte Gerade, im Raume aber die unbegrenzte Ebene entgegengestellt und bemerkt, daß man in einem großen Teile der geometrischen Sätze stets das Wort „Punkt“ mit „Gerade“ bezw. mit „Ebene“ vertauschen kann. Das ist die Aussage des Prinzipes der Dualität.

Poncelet knüpft seine Entwicklungen an die „théorie des polaires réciproques“, die Polarentheorie der Kegelschnitte an. In Bezug auf einen bestimmten Kegelschnitt gehört bekanntlich



jedem Punkt p eine Gerade π als Polare zu, die etwa als Verbindungsgerade der Berührungspunkte der Tangenten von p aus definiert ist; umgekehrt gehört dann auch jeder Geraden π ein Pol p zu, und

1) Berlin 1832 = Ges. Werke Bd. I (Berlin 1881) p. 229 ff.
2) Nürnberg 1846.
3) Zitiert S. 32.
4) 2 Bde. Essen 1828. 1831.

es besteht die reziproke "Eigenschaft, daß die Polare π' eines auf π gelegenen Punktes p' durch p geht. Diese spezielle Zuordnung von Geraden und Punkten sowie die analoge Beziehung von Punkten und Ebenen im Raume in Bezug auf eine Fläche zweiter Ordn. ließ nun Poncelet erkennen, daß man in der Tat alle Sätze der Geometrie, die sich nur auf Lageneigenschaften, das Treinanderliegen von Punkten, Geraden, Ebenen beziehen, in der oben bezeichneten Weise „dualisieren" darf. Ein berühmtes Beispiel ist der Pascalsche Satz über das dem Kegelschnitte eingeschriebene Sechseck, der durch Dualisierung in den Brianchonschen Satz über das ihm umgeschriebene Sechseck übergeht.

2.) Man hat nun bald aber das Dualitätsprinzip tiefer aufgefasst, indem man es von der Polarentheorie ablöste und es als einen Ausfluß des ganzen eigenartigen Aufbaues der projektiven Geometrie erkannte. Diese schöne Systematik tritt zuerst bei Steiner auf, und Sie müssen nur lesen, wie er in der Vorrede seiner „systematischen Entwicklung" [1] in begeisterten Worten schildert, wie erst die projektive Geometrie Ordnung in das Chaos der geometrischen Sätze bringt und wie sich in ihr alles in naturgemäßester Weise aneinanderreiht.

Wir werden im Laufe dieser Vorlesung noch oft von dieser

1.) loc. cit. pag. 233.

Systematik zu reden haben, einen kurzen Überblick über sie möchte ich schon hier geben. Dabei wird das Prinzip der Dualität darin zum Ausdruck kommen, daß in die Grundbegriffe und Grundsätze („Axiome") der Geometrie stets Punkt und Ebene bezw., wenn wir uns auf die Ebene beschränken, Punkt und Gerade, ganz symmetrisch eingehen, d.h. daß diese Axiome und also auch die aus ihnen logisch abzuleitenden Sätze stets paarweise dualistisch sind. Die sog. „Maßbeziehungen" der elementaren Geometrie, wie Entfernung, Winkel etc. treten zunächst in dieser Systematik gar nicht auf; wir werden erst später sehen, wie sie sich einordnen.

Des Näheren gestaltet sich der Aufbau so:

a.) Drei Arten von Gebilden werden als einfachste zu Grunde gelegt: der Punkt, die (unbegrenzte) Gerade, die (unbegrenzte) Ebene.

b.) Zwischen diesen Grundgebilden bestehen folgende Beziehungen (Verknüpfungssätze oder „Axiome der Verknüpfung" genannt), deren ausnahmslose Gültigkeit durch geschickte später noch näher zu erörternde Einführung uneigentlicher (unendlichferner) Elemente erreicht wird:
2 Punkte bestimmen eine Gerade, 3 nicht zufällig in einer Geraden gelegene Punkte eine Ebene; 2 Ebenen bestimmen eine Gerade, 3 nicht durch eine Gerade gehende Ebenen

über einen Punkt.

2.) Wir bilden nun die linearen Grundgebilde (d. h. diejenigen, die analytisch durch lineare Gleichungen definiert sind):

A.) Die Grundgebilde 1. Stufe aus je ∞^1 Elementen:

α.) die Gesamtheit der Punkte einer Geraden: gerade Punktreihe.

β.) die Gesamtheit der Ebenen durch eine Gerade: Ebenenbüschel.

γ.) die Geraden durch einen Punkt in einer Ebene: (ebenes) Strahlenbüschel.

B.) Grundgebilde 2. Stufe aus je ∞^2 Elementen:

α.) Die Ebene als Ort ihrer Punkte: Punktfeld.

α'.) Die Ebene als Ort ihrer Geraden: Geradenfeld.

β.) Die Ebenen durch einen festen Punkt: Ebenenbündel.

β'.) Die Geraden durch einen festen Punkt: Geradenbündel.

C.) Grundgebilde 3. Stufe von je ∞^3 Elementen:

α.) Der Raum als Ort seiner Punkte: Punktraum.

β.) Der Raum als Ort seiner Ebene: Ebenenraum.

In diesem ganzen Aufbau ist in der Tat überall vollkommene Dualität offenbar, und man kann auch weiterhin von den damit gegebenen Grundlagen aus das ganz-

ze Gebäude der projektiven Geometrie auf zwei zueinander duale Arten aufführen, indem man einmal von den Punkten, das andere Mal von den Ebenen ausgeht.

3) Das läßt sich wieder begrenzter darstellen, wenn wir weiterhin den analytischen Weg einschlagen und dazu zunächst einmal zusehen, wie das Prinzip der Dualität bei Plücker erscheint. Man kann die Gleichung einer geraden Linie, wenn das konstante Glied nicht gerade Null ist, bekanntlich schreiben:

$$u x + v y + 1 = 0 .$$

Die Gerade ist bestimmt, wenn man die Werte der Koeffizienten u, v kennt, die übrigens bei dieser Schreibweise ganz symmetrisch mit den laufenden Koordinaten x, y auftreten; es ist nun Plückers Gedanke, diese u, v als „Koordinaten der Geraden" mit den Punktkoordinaten x, y als gleichberechtigt anzusehen und sie unter Umständen statt dieser als variabel gelten zu lassen. Bei dieser umgekehrten Auffassung sind x, y feste Konstante und unsere Gleichung drückt die Bedingung aus, daß eine variable Gerade durch einen festen Punkt geht: sie ist die Gleichung dieses Punktes in Geraden-Koordinaten. Schließlich braucht man auch keines von beiden Gebilden in der Ausdrucksweise zu bevorzugen, und kann ganz unentschieden lassen, wel-

ches Größenpaar man als Konstant und welches man als variabel ansieht; dann stellt die Gleichung einfach die Bedingung für „vereinigte Lage" von Punkt und Gerade dar. Das Prinzip der Dualität beruht nun einfach darauf, daß jene Gleichung in x, y einerseits und u, v andererseits genau symmetrisch ist, und in dieser Eigenschaft liegt alles, was wir vorhin als die in den Sätzen der Verknüpfung liegende Dualität aussprachen. Im Raume tritt natürlich an Stelle der Geradengleichung die Ebenengleichung

$$u x + v y + w z + 1 = 0 ,$$

und man kann alle weiteren Betrachtungen ganz analog führen.

Infolge dieser Betrachtungen kann man die Geometrie analytisch sowohl so entwickeln, daß man x, y, z, als auch so, daß man u, v, w als grundlegende Variable auffaßt, wobei sich die Worte Punkt und Ebene einfach vertauschen. So entsteht der bekannte doppelte Aufbau der Geometrie, den Sie in vielen Lehrbüchern ausdrücklich so ausgeprägt finden, daß links und rechts von einem vertikalen Striche die zueinander dualen Theoreme stehen. Werfen wir rasch einen Blick auf die so entstehenden immer einander dualen höheren Gebilde, die sich an das oben begonnene in

sich duale Schema der linearen Gebilde anschließen.

Wir beginnen damit, daß wir x, y, z als bestimmte Funktionen φ, χ, ψ eines Parameters t auffassen; dadurch wird eine Raumkurve dargestellt, die speziell (wenn φ, χ, ψ identisch einer linearen Gleichung genügen) eine ebene Kurve sein kann, oder endlich, (wenn sie zwei lineare Gleichungen befriedigen), in eine Gerade ausartet. Setzen wir ebenso u, v, w gleich Funktionen von t, so erhalten wir eine einfach unendliche Aufeinanderfolge von Ebenen, die wir uns am Begrenztesten durch die von ihnen umhüllte abwickelbare Fläche vergegenwärtigen. Den beiden aufgeführten Spezialfällen entspricht hier, daß alle Ebenen durch einen Punkt gehen, d. h. daß sie einen Kegel umhüllen, oder daß sie gar alle durch eine feste Gerade gehen.

Stellen wir x, y, z als Funktionen zweier Parameter t, t' dar, so erhalten wir eine allgemeine Fläche, die speziell in eine Ebene ausarten kann; das duale dazu ist die Gesamtheit der zweifach unendlich vielen eine Fläche umhüllenden Ebenen, die speziell in das durch einen festen Punkt gehende Ebenenbündel ausarten kann.

Schreiben wir das Resultat in eine kleine Tabelle zusammen:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \chi(t) \\ z &= \psi(t) \end{aligned}\right\} \begin{matrix} \text{Kurve} \\ (\text{ebene Kurve}) \\ (\text{Gerade}) \end{matrix} \qquad \left.\begin{aligned} u &= \varphi(t) \\ v &= \chi(t) \\ w &= \psi(t) \end{aligned}\right\} \begin{matrix} \text{Abwickelb. Fläche.} \\ (\text{Kegel}) \\ (\text{Gerade}) \end{matrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t,t') \\ y &= \chi(t,t') \\ z &= \psi(t,t') \end{aligned}\right\} \begin{matrix} \text{Fläche} \\ (\text{Ebene}) \end{matrix} \qquad \left.\begin{aligned} u &= \varphi(t,t') \\ v &= \chi(t,t') \\ w &= \psi(t,t') \end{aligned}\right\} \begin{matrix} \text{Fläche} \\ (\text{Punkt}) \end{matrix}$$

Das genüge als Beispiel eines solchen dualen Schemas, an dessen weitgehender Ausbildung man lange Zeit hindurch gern gearbeitet hat.

4.) Nun findet sich bei Plücker aber schon eine sehr wesentliche Weiterbildung dieses ganzen Ansatzes. Genau so, wie er hier die 3 Koeffizienten der Ebenengleichung als variable Ebenenkoordinaten auffasst, hat er die Idee, ganz allgemein die Konstanten, von denen irgend ein geometrisches Gebilde abhängt – z. B. die 9 Koeffizienten der Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung – als variabele Koordinaten dieses Gebildes anzusehen und zu untersuchen, was irgend welche Gleichungen zwischen ihnen bedeuten mögen. Von „Dualität" im eigentlichen Sinne ist hier freilich nicht mehr die Rede, denn in der Ausgangsgleichung werden die neuen Variablen jetzt keineswegs mehr symmetrisch zu den alten Punktkoordinaten auftreten.

Plücker selbst hat diesen Gedanken besonders

für die Geraden des Raumes ausgeführt. Eine Raumgerade ist in Punktkoordinaten durch 2 Gleichungen bestimmt, die Plücker schreibt:

$$\begin{cases} x = r.z + \varrho \\ y = s.z + \sigma \end{cases}.$$

Die 4 Konstanten r, s, ϱ, σ dieser Gleichungen werden dann als Koordinaten der Geraden im Raum zu bezeichnen sein, und Plücker fragt nach der Bedeutung von 1, 2, 3 Gleichungen zwischen ihnen. Eine Gleichung $f(r, s, \varrho, \sigma) = 0$ scheidet aus den sämtlichen vierfach unendlich vielen Geraden dreifach unendlich viele aus, die Plücker einen Linienkomplex nennt; den einfachsten Fall eines solchen, den linearen Komplex, hatten wir nämlich bereits besprochen (S. 71). Zwei Gleichungen $f(r, s, \varrho, \sigma) = 0$, $g(r, s, \varrho, \sigma) = 0$ bestimmen eine Linienkongruenz; dies Wort soll besagen, daß es sich um die Geraden handelt, in denen die beiden Komplexe $f = 0$, $g = 0$ übereinstimmen; man sagt dafür auch wohl Strahlensystem. Endlich bestimmen 3 Gleichungen $f = g = h = 0$ einfach unendlich viele Geraden, die eine gewisse Fläche überdecken: Linienfläche oder Regelfläche.

Diese Darstellung hat Plücker in seinem Werke: „Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement“ [1], von 1868/69

[1] Abt. 1. 2. Leipzig 1868 u. 69.

gegeben; er starb vor nun genau 40 Jahren, als die Drucklegung des ersten Teiles dieses Werkes fast beendet war; ich durfte mir als sein damaliger Assistent die Sporen mit der Herausgabe des zweiten Teiles verdienen.

Das allgemeine Plückersche Prinzip, irgendwelche Gebilde als Raumelemente, ihre Konstanten als Koordinaten zu verwenden, hat auch weiterhin zu interessanten Entwicklungen Anlass gegeben. So hat der grosse norwegische Mathematiker Sophus Lie, der lange in Leipzig gewirkt hat, mit seiner Kugelgeometrie grossen Erfolg gehabt; hier wird die Kugel als Raumelement benutzt, die wie die Gerade von 4 Parametern abhängt. Ich erwähne ferner noch aus neuester Zeit Study's „Geometrie der Dynamen"[1], wo um den uns bereits geläufigen Begriff der Dyname eine ganze Reihe hierher gehöriger interessanter Untersuchungen geknüpft werden.

6.) Ueber diese im vorigen behandelte „neuere Geometrie", die im Grunde doch auf der Hervorhebung der unbegrenzten Geraden und der unbegrenzten Ebene als Raumelement beruht, hinaus geht die von Grassmann 1844 eingeleitete Entwicklung, die den begrenzten Linienteil, Ebenenteil, Raumteil voranstellt, und ihnen Koordinaten nach dem „Determinantenprinzip" beilegt; wir haben

1.) Leipzig 1903.

ja ausführlich davon gesprochen. Das Schöne daran ist, daß so den Bedürfnissen der Mechanik und Physik in ungleich wirksamerer Weise entsprochen wird als es z. B. durch die Liniengeometrie und das Prinzip der Dualität geschieht. – Natürlich sind diese verschiedenen Richtungen keineswegs so scharf getrennt, wie ich das hier der besseren Uebersicht halber darstelle; in der Tat verhält es sich nur so, daß Plücker mehr auf die unbegrenzte Gerade, Graßmann mehr auf den Linienteil Gewicht legte, während bei jedem auch das andere gelegentlich vorkommt. Naturgemäß könnte eigentlich ebenso wie in der vorigen Rubrik auch in dieser ausgeführt werden.

Nun habe ich aber zu betonen, daß sich Graßmann keineswegs auf unmittelbar anwendbare Dinge beschränkt hat, sondern frei schaffend weit darüber hinaus ging. Das Wichtigste ist, daß er allgemein n Punktkoordinaten $x_1, x_2 \ldots x_n$ statt dreier x, y, z einführte und so zur Geometrie des Raumes R_n von n Dimensionen aufstieg, deren eigentlicher Schöpfer er ist. Nach seinem allgemeinen Prinzip betrachtet er in einem solchen höheren Raume die Matrizen aus den Koordinaten von 2, 3 ... n + 1 Punkten, deren Unterdeterminanten ihm dann eine ganze Reihe fundamentaler, dem Linienteil und Ebenenteil entsprechender Grundgebilde des R_n liefern. Ich erwähnte schon,

daß Grassmann die so entstehende abstrakte Disziplin als Ausdehnungslehre bezeichnet.

Diese Auffassung des R_n hat in neuerer und neuester Zeit eine Ausdehnung dahin erfahren, daß man unendlich viele Koordinaten $x_1, x_2, x_3 \ldots$ (in infin.) in Betracht zieht, und demgemäß vom unendlich-dimensionalen Raume R_∞ spricht; gerade hier in Göttingen ist ja jetzt viel davon die Rede. Daß solche Betrachtungen einen Sinn haben, erkennen Sie, wenn Sie etwa nur an das Operieren mit Potenzreihen denken: Eine Potenzreihe ist festgelegt durch den Inbegriff ihrer unendlich vielen Koeffizienten, und kann insofern durch einen Punkt im R_∞ gedeutet werden.

Das Merkwürdige und heut bei den Mathematikern allgemein Anerkannte ist dabei nur, daß eine solche geometrische Sprechweise bei n und sogar bei unendlich vielen Variablen einen wirklichen Nutzen gewährt; die Sachen werden dadurch viel lebendiger, als wenn man bei abstrakt analytischen Ausdrücken bliebe, und man eignet sich bald eine gewisse Gewandtheit im Gebrauche jener geometrischen Vorstellungen an, als ob man im R_n oder R_∞ zu Hause wäre. Was freilich in Wahrheit hinter dieser Erscheinung steckt, ob dabei gar eine natürliche Veranlagung des Menschen zu Tage tritt, die nur durch die Begrenztheit unserer Erfahrung für ge-

wöhnlich allein in 2 und 3 Dimensionen ausgebildet wird, das mögen die Psychologen und Philosophen entscheiden!

Wenn ich Sie hier aber auch über die Rolle der Mathematik in der allgemeinen Kultur orientieren soll, so muß ich noch mit einem Worte die Wendung berühren, die diese mehrdimensionale Geometrie 1873 durch den Leipziger Astronomen Zöllner erhielt; hier liegt einer der seltenen Fälle vor, wo eine mathematische Spezialweisheit ins allgemeine Bewußtsein überging - Redensarten mit der „vierten Dimension" gebraucht ja heutzutage jeder Mensch. Diese Popularisierung der „vierten Dimension" ging von Versuchen aus, die der Taschenspieler Slade Zöllner vormachte; Slade gab sich als spiritistisches Medium aus, das in direktesten Verkehr mit den Geistern stünde, und seine Vorführungen bestanden unter anderm darin, daß er Gegenstände verschwinden und wieder auftauchen ließ. Zöllner glaubte an diese Experimente und stellte zu ihrer Erklärung eine physikalisch-metaphysische Theorie auf, die jene Verbreitung erlangt hat: Für das wirkliche physikalische Geschehen soll ein vier- oder mehrdimensionaler Raum in Betracht kommen, von dem wir kraft unserer Veranlagung aber nur einen dreidimensionalen Ausschnitt $x_4 = 0$ wahrnehmen können; ein besonders veranlagtes Medium,

das etwa mit außerhalb dieses unseres Raumes Lebenden Wesen in Verbindung steht, kann beliebig Gegenstände aus ihm entfernen, die uns dann unsichtbar werden, oder sie wieder zurückbringen. Man macht sich diese Verhältnisse gern am Bilde von Wesen klar, die an eine zweidimensionale Fläche gebunden sind und nur innerhalb dieser ihre Wahrnehmungen machen können; man denke etwa an die Lebensweise gewisser Tiere wie z. B. der Milben. Nimmt man aus der Fläche, in der diese Wesen leben, einen Gegenstand fort, so scheint er für sie, (so denkt man sich die Sache) gänzlich zu verschwinden, und ganz analog stellt sich Zöllners Slades Experimente vor. Man hat sich vielfach die Existenz dieser zweidimensionalen Wesen näher ausgemalt; besonders amüsant ist das in einer anonym erschienenen englischen Schrift „Flatland" [1] geschehen. Da schildert der Autor ganz genau das Aussehen einer zweidimensionalen Welt; die einzelnen Wesen unterscheiden sich durch ihre geometrische Gestalt, die um so komplizierter ist, je höher organisiert sie sind. Reguläre Polygone sind die höchsten Wesen, die Frauen, von denen der Autor eine sehr geringe Meinung hat, haben einfach die

1.) A romance of many dimensions. By a Square. London 1884. Der Autor verfolgt hier im Grunde den Zweck, die Möglichkeit einer mehrdimensionalen Geometrie begreiflich zu machen.

Gestalt eines Striches und so geht das weiter.

Ich brauche hier wohl nicht ausdrücklich auszuführen, daß die mathematisch aufgefaßte mehrdimensionale Geometrie seit Zöllners metaphysischen Betrachtungen nichts zu schaffen hat; die Mathematik erweist sich hier, um ein modernes Wort zu gebrauchen, als rein normative Wissenschaft, die formal möglichen Verknüpfungen der Dinge betrachtet und ganz unabhängig von naturwissenschaftlichen oder metaphysischen Ereignissen besteht.

Nach diesem Exkurs möchte ich nun noch etwas näher auf die höheren Gebilde eingehen, die sich als Erzeugnisse der Grassmannschen Elementargebilde – insbesondere der Vektoren – den im Vorangehenden aufgeführten Erzeugnissen von Punkten, Ebenen etc. an die Seite stellen lassen. Wir kommen hier zu der weiteren Ausgestaltung der eigentlichen Vektoranalysis, die namentlich durch Hamilton ja eines der wertvollsten Instrumente der Mechanik und Physik geworden ist; ich lege Ihnen Hamiltons ins Deutsche übertragene „Elemente der Quaternionen" [1] sowie die „Vector Analysis" [2] des gleichfalls sehr verdienten Amerikaners Gibbs hier vor.

Der neue Gedanke, der hier namentlich zu den uns schon bekannten Begriffsbildungen von Vektor und Skalar

1) Deutsch von P. Glan. 2 Bde. Leipzig 1882/84.
2) Ed. by E. B. Wilson. New York 1901.

hinzukommt, ist der, diese Größen an die Punkte des Raumes anzuknüpfen: Man ordnet jedem Raumpunkte $(x|y|z)$ einen bestimmten Skalar zu:

$$S = f(x, y, z),$$

und spricht dann von einem Skalarfeld; andererseits heftet man jedem Raumpunkte einen bestimmten Vektor an:

$$X = \varphi(x, y, z), \quad Y = \chi(x, y, z), \quad Z = \psi(x, y, z)$$

und nennt das ein Vektorfeld.

Hierdurch sind zwei der wichtigsten geometrischen Grundbegriffe bezeichnet, die man in der modernen Physik überall benutzt; es genügt wohl, wenn ich durch ganz wenige Stichproben an ihre große Verbreitung erinnere: Die Dichte einer Massenverteilung, die Temperatur, die potentielle Energie eines kontinuierlich ausgedehnten Systemes, immer als Funktion des Ortes aufgefaßt, sind Beispiele von Skalarfeldern. Das Kraftfeld, in dem an jedem Punkte eine bestimmte Kraft angreift, ist das typische Beispiel eines Vektorfeldes; weitere sind in der Elastizitäts-lehre das Feld der Verschiebungen eines deformierten Körpers, wo jedem Punkte die Strecke seiner Verschiebung zugehört, ähnlich in der Hydrodynamik das Geschwindigkeitsfeld, endlich in der Elektrodynamik das elektrische und magnetische Feld, in dem jedem Punkte ein bestimmter elektrischer und ein mag-

metischer Vektor zugehört.

Auf Hamilton geht nun die Art zurück, in der man diese Felder der Behandlung durch Differential- und Integralrechnung in sehr einfacher Art unterziehen kann.

Dabei ist die eine zu Grunde liegende Bemerkung, daß die Differentiale

$$dx, \quad dy, \quad dz,$$

deren Verhältnisse eine Fortschreitungsrichtung durch einen Raumpunkt bestimmen, einen freien Vektor darstellen, d. h. daß sie sich bei Koordinatentransformationen wie Vektor-Komponenten verhalten. Das folgt leicht daraus, daß vor dem Grenzübergang dx, dy, dz eine kleine Strecke durch $x \mid y \mid z$, also in der Tat einen Vektor darstellt.

Wichtiger, aber auch schwerer aufzufassen, ist die zweite Bemerkung, daß auch die Symbole der partiellen Differentiation $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ den Charakter von Vektor-Komponenten haben, d. h. daß beim Uebergang zu einem neuen rechtwinkligen Koordinatensysteme x', y', z' die neuen Symbole $\frac{\partial}{\partial x'}$, $\frac{\partial}{\partial y'}$, $\frac{\partial}{\partial z'}$ sich aus den alten ergeben, wie die transformierten Koordinaten eines Vektors (und zwar eines polaren Vektors).

Das soll sogleich deutlicher werden, wenn wir es etwa für eine Drehung des Koordinatensystemes

$$(1)\qquad \begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{cases}$$

wirklich durchrechnen. Diese Rechnungsformeln sind, wie wir früher ausführlich darlegten (S. 84), dadurch charakterisiert, daß ihre Auflösung einfach durch Vertauschung von Zeilen und Kolonnen des Koeffizientensystems gegeben wird:

$$(2)\qquad \begin{cases} x = a_1 x' + a_2 y' + a_3 z' \\ y = b_1 x' + b_2 y' + b_3 z' \\ z = c_1 x' + c_2 y' + c_3 z' . \end{cases}$$

Haben wir nun irgend eine Funktion von x, y, z, so können wir sie mittels (2) auch als Funktion von x', y', z' darstellen, und nach den bekannten Regeln partieller Differentiation wird

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial y'} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial z'} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z'} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z'} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial z'} . \end{aligned}$$

Die Ableitungen von x, y, z nach x', y', z' kann man sofort aus (2) entnehmen, und erhält:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} &= a_1\frac{\partial}{\partial x} + b_1\frac{\partial}{\partial y} + c_1\frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y'} &= a_2\frac{\partial}{\partial x} + b_2\frac{\partial}{\partial y} + c_2\frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z'} &= a_3\frac{\partial}{\partial x} + b_3\frac{\partial}{\partial y} + c_3\frac{\partial}{\partial z} , \end{aligned}$$

und der Vergleich mit (1) ergibt in der Tat Uebereinstim-

mung mit den Transformationsformeln der Punktkoordinaten, also auch der Vektorkomponenten.

Eine wesentlich einfachere Rechnung würde nun auch zeigen, daß bei Verschiebung des Koordinatensystems die 3 Symbole sich überhaupt nicht ändern, bei Inversion aber das Vorzeichen wechseln, womit nach unseren allgemeinen Prinzipien die Behauptung bewiesen ist. Freilich haben wir dabei Maßstabänderungen nicht berücksichtigt, d. h. auf die Dimension keine Rücksicht genommen; tun wir das noch, so ergibt sich, daß unsere Symbole die Dimension -1 haben, da die Differentiale der Koordinaten im Nenner auftreten.

Mit dem Hamiltonschen Vektorsymbol $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ wollen wir nun die Operationen vornehmen, die wir früher mit Vektoren vorgenommen haben. Ich schicke die Bemerkung voraus, daß man das Resultat der Anwendung der Operation $\frac{\partial}{\partial x}$ auf eine Funktion $f(x, y, z)$, also $\frac{\partial f}{\partial x}$, als Produkt von $\frac{\partial}{\partial x}$ und f bezeichnen kann, da die formalen Gesetze der Multiplikation, soweit sie für das folgende in Betracht kommen, insbesondere die Distributivität mit der Addition, hierbei bestehen bleiben.

Es sei nun ein Skalarfeld $S = f(x, y, z)$ gegeben, und wir wollen im soeben festgelegten Sinne

diesen Skalar mit den Komponenten des Hamiltonschen Vektorsymbols multiplizieren, d. h. wir bilden den Vektor

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Wir haben früher gesehen (S. 100), daß das Produkt eines Skalars in einen Vektor wieder ein Vektor ist, der unabhängig vom Koordinatensysteme definiert ist, und da beim Beweise dieses Satzes nur solche Eigenschaften der Multiplikation heranzuziehen sind, die bei unserer symbolischen Multiplikation auch bestehen, so definieren jene 3 partiellen Ableitungen des Skalarfeldes einen Vektor, der noch vom Punkte x, y, z abhängt, also ein Vektorfeld; dieses Vektorfeld hängt mit dem Skalarfeld in einer vom speziell gewählten Koordinatensysteme unabhängigen Weise zusammen. Man nennt dieses Vektorfeld, noch mit negativem Zeichen versehen, mit einem aus der Meteorologie stammenden Worte den Gradienten des Skalarfeldes. So finden Sie z. B. in den Wetterkarten der Zeitungen als Skalarfeld S den Luftdruck an jedem Orte dargestellt, indem die Kurven $S = \text{Const.}$ ausgezogen und die zugehörigen Werte von S angeschrieben sind; der Gradient gibt dann die Richtung der schnellsten Abnahme des Luftdruckes an und zeigt stets normal zu den Isobarenkurven.

Aus 3 Vektorkomponenten X, Y, Z kann man nun stets (vgl. S. 99) einen Skalar $X^2 + Y^2 + Z^2$ bilden; demnach erhalten wir hier aus dem Gradienten eines Skalars ein neues Skalarfeld

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 ,$$

das mit jenem und daher auch mit dem ursprünglichen Skalarfelde in einer vom Koordinatensysteme unabhängigen Weise zusammenhängen muß; dieser Skalar ist bekanntlich gleich dem Quadrat der Länge des Gradienten oder, wie man sagt, gleich dem Quadrat des Gefälles des Skalarfeldes f.

Unter Anwendung desselben Satzes wollen wir nun aus dem Vektorsymbol $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ selbst einen Skalar bilden, indem wir jede Komponente symbolisch mit sich selbst multiplizieren, d. h. die durch sie bezeichnete Operation zweimal anwenden. Das gibt dann die Operation

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} ,$$

die also skalaren Charakter hat, d. h. bei Koordinatentransformationen invariant bleibt. „Multiplizieren" wir dies skalare Symbol mit einem Skalarfeld f, so ergibt sich notwendig wieder ein Skalarfeld:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} ,$$

das mit jenem ersten in einer vom Koordinatensysteme

unabhängigen Weise zusammenhängt. Denkt man sich im Feld eine Flüssigkeit strömen, deren Dichte anfänglich gleich 1 ist und deren Geschwindigkeit an jedem Orte durch den Gradienten von f gegeben sein soll, so nimmt an jeder Stelle im ersten Zeitmoment dt die Dichte der Flüssigkeit um einen Betrag zu, der gleich jenem Skalar multipliziert mit dt ist. Man nennt daher $-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)$ die Divergenz des Gradienten von f.

Man bezeichnete früher nach einer von Lamé herrührenden Ausdrucksweise ein Skalarfeld $S = f(x, y, z)$ auch wohl als eine Punktfunktion (fonction de point) und nannte dann das erste damit verbundene Skalarfeld $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2$ den ersten Differentialparameter, das zweite $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ den zweiten Differentialparameter.

Wir wollen nun in ähnlicher Weise unser Vektorsymbol $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ mit einem gegebenen (polaren) Vektorfelde

$$X = \varphi(x, y, z), \quad Y = \chi(x, y, z), \quad Z = \psi(x, y, z)$$

kombinieren. Wir haben nun 2 Arten von Multiplikation zweier Vektoren kennen gelernt:

α.) Durch innere Multiplikation entsteht ein Skalar, der hier bei der bereits geläufigen Deutung der symbolischen Multiplikation mit $\frac{\partial}{\partial x}$ heißen wird:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} .$$

Er ist natürlich wiederum von x, y, z abhängig, stellt also ein skalares Feld dar, das mit dem gegebenen Vektorfelde in einer vom Koordinatensysteme unabhängigen Beziehung steht; es heißt in dem vorhin definierten Sinne seine Divergenz.

b.) Die äußere Multiplikation liefert die Matrix:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} ,$$

deren drei Determinanten zu lesen sind als:

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} , \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} , \quad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} .$$

Sie definieren nach dem früheren eine Raumgröße oder einen axialen Vektor bezw. ein axiales Vektorfeld, und der Zusammenhang der beiden Vektorfelder ist wieder unabhängig von der Wahl des Koordinatensystemes. Nach Maxwell nennt man dieses Vektorfeld den Curl des gegebenen, wofür man jetzt in Deutschland wohl auch das auf die gleiche germanische Wurzel zurückgehende deutsche Wort Quirl gebraucht; gelegentlich sagt man dafür auch wohl Rotor.

So haben wir jetzt durch systematische geometrische Untersuchung alle die Größen erhalten, die der Physiker bei seinen Untersuchungen der verschiedensten Vektorfelder stets zur Hand haben muß.

Es ist reine Geometrie, was wir hier treiben; das muß ich um so mehr betonen, als man diese Dinge vielfach als zur Physik gehörig ansieht, und sie demgemäß in den physikalischen, statt in den geometrischen Büchern und Vorlesungen behandelt. Das ist aber sachlich durchaus unbegründet und nur als ein Residuum der historischen Entwickelung zu verstehen; denn die Physik mußte sich hier seiner Zeit erst das Rüstzeug schaffen, das sie notwendig brauchte und in der Mathematik nicht fertig vorfand.

Es waltet hier dasselbe Mißverständnis ob, auf das ich Sie schon im vorigen Semester auf dem Gebiete der Analysis mehrfach aufmerksam machen mußte. Die Physik hat im Laufe der Zeit allerlei mathematische Bedürfnisse entwickelt und dadurch der mathematischen Wissenschaft vielfach äußerst wertvolle Anregungen gegeben. Der mathematische Unterricht aber, so wie er besonders auf Schulen noch meist erteilt wird, berücksichtigt diese Änderungen nicht; er geht in den alten seit Jahrhunderten eingefahrenen Gleisen weiter fort, und überläßt es der Physik, sich ihre Hilfsmittel mühsam selbst zurechtzumachen, obwohl ihre mathematische Verarbeitung vielfach einen viel geeigneteren Stoff für den mathe-

matischen Unterrichts abgeben würde, als dessen herkömmliche Gegenstände. Sie sehen, meine Herren, auch im geistigen Leben gibt es ein Trägheitsgesetz; alles geht auf seiner alten Bahn geradlinig weiter und jeder Aenderung, jedem Uebergang in neue moderne Bahnen wird ein grosser Widerstand entgegengesetzt.

Ich verlasse damit den ersten Hauptteil, der uns die verschiedensten Arten geometrischer Gebilde, die Objekte der Geometrie, kennen gelehrt hatte. Nunmehr soll uns eine besondere Methode beschäftigen, die für die genauere Erforschung dieser Gebilde von grösster Bedeutung ist:

Zweiter Hauptteil: Die geometrischen Transformationen.

Es ist eines der wichtigsten Kapitel der wissenschaftlichen Geometrie, das wir hier beginnen. Ich möchte aber hier besonders auch darauf hinweisen, daß es in seinen einfacheren Teilen und seinen Grundideeen auch für den Schulunterricht sehr anregendes Material liefert; sind doch die geometrischen Transformationen schließlich nichts als eine Verallgemeinerung des einfachen Funktionsbegriffes, den ja unsere modernen Reformtendenzen durchaus in den Mittelpunkt des

mathematischen Unterrichtes stellen wollen.

Die einfachste Klasse geometrischer Transformationen enthält die sog. Punkttransformationen, die den Punkt als Raumelement bestehen lassen, d. h. jedem Punkte wieder einen Punkt zuordnen; ihnen gegenüber stehen solche Transformationen, die den Punkt in andere Raumelemente, wie Gerade, Ebenen, Kugeln u. dgl. überführen.

Ich beginne mit der Behandlung der Punkttransformationen; dabei stelle ich auch hier die analytische Behandlung voran, da sie jeweils den präzisesten Ausdruck der Tatsachen gestattet. Das analytische Abbild einer Punkttransformation ist das, was die Analysis Einführung neuer Veränderlicher

$$\begin{cases} x' = \varphi(x, y, z) \\ y' = \psi(x, y, z) \\ z' = \chi(x, y, z) \end{cases}$$

statt der alten x, y, z nennt. Ein solches Gleichungssystem kann man freilich in der Geometrie auf zweierlei Arten, ich möchte sagen aktiv und passiv, interpretieren:

Passiv stellt es eine Aenderung des Koordinatensystemes dar, d. h. dem Punkte mit den Koordinaten x, y, z werden die neuen Koordinaten x', y', z'

zugeschrieben. Von dieser Deutung haben wir bisher stets bei dem Studium der Aenderungen des rechtwinkligen Koordinatensystemes Gebrauch gemacht; bei allgemeinem φ, χ, ψ aber ist natürlich in jenen Formeln noch darüber hinaus auch der Uebergang zu ganz anderartigen Koordinatensystemen, wie z. B. Dreieckskoordinaten, Polarkoordinaten, elliptischen Koordinaten u. dgl. einbegriffen. Demgegenüber hält die aktive Auffassung das Koordinatensystem fest und gestaltet den Raum um: Jedem Punkte x, y, z wird der Punkt x', y', z' zugeordnet, und damit ist tatsächlich eine Transformation der Raumpunkte gegeben; diese Deutung ist es, mit der wir uns im folgenden beschäftigen wollen.

Die ersten Beispiele von Punkttransformationen werden wir gemäß diesen Erörterungen natürlich erhalten, indem wir die Formeln heranziehen, die uns früher (S. 87 f.) – passiv aufgefaßt – eine Verschiebung, Drehung, Spiegelung, Maßstabänderung des rechtwinkligen Koordinatensystemes darstellten, und sie aktiv interpretieren. Man überzeugt sich ganz leicht, daß die ersten beiden jener Formelgruppen eine Verschiebung des Raumes – als starres Gebilde aufgefaßt – bezw. eine Drehung um O gegen das festgehaltene

Koordinatensystem darstellen; die dritte Gruppe gibt eine Inversion der Raumpunkte am Nullpunkt O (jedem Punkt x, y, z wird der symmetrisch zu O gelegene $-x, -y, -z$ zugeordnet), die letzte endlich stellt eine sog. Aehnlichkeitstransformation des Raumes vom Nullpunkt O aus dar.

Der erste Teil unserer Untersuchungen soll nun einer speziellen einfachsten Gruppe von Punkttransformationen gewidmet sein, die die genannten Transformationen sämtlich als Unterfälle umfaßt; es sind die sog.

I. Affinen Transformationen.

Sie sind analytisch dadurch definiert, daß x', y', z' die allgemeinsten ganzen linearen Funktionen von x, y, z sind:

$$(1.) \quad \begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 \\ z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 \end{cases}.$$

Ihr Name, der übrigens auf Möbius zurückgeht, soll besagen, daß bei diesen Transformationen das Unendlichweite des Raumes in sich übergeht, also gewissermaßen die „Enden" des Raumes erhalten bleiben; in der Tat ergeben die Formeln sofort, daß x', y', z' gleichzeitig mit x, y, z unendlich wird. Das ist ein Gegensatz zu den später zu behandelnden allgemei-

neu projektiven Transformationen, wo x', y', z' gebrochene lineare Funktionen von x, y, z werden und demgemäß gewisse im Endlichen gelegenen Punkte ins Unendliche weite transformiert werden.

Die Transformation (1) kann man offenbar zusammensetzen aus je einer Verschiebung des Raumes um die Größen d_1, d_2, d_3 parallel zu den 3 Koordinatenrichtungen, und der keine Konstanten ferner mehr enthaltenden linearen Transformation:

$$(2.) \qquad \begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{cases},$$

die den Nullpunkt ungeändert läßt und die etwas bequemer zu untersuchen ist. In der Physik spielen diese Transformationen als homogene Deformationen des Raumes eine große Rolle; man sagt Deformationen, weil, allgemein zu reden, die Gestalten der Körper bei der Transformation geändert werden.

Wir beginnen die Untersuchung dieser Transformationen (2)

1.) mit der Frage, wie es mit der Auflösbarkeit des Gleichungssystemes (2) steht. Wie die Determinantentheorie lehrt, kommt es dabei wesentlich darauf an, ob die Determinante des gegebenen Koeffi-

zientensystemes

$$(3.)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

verschwindet oder nicht. Der erste Fall wird uns später noch besonders beschäftigen; vorläufig nehmen wir $\Delta \neq 0$ an. Dann ist (2) eindeutig lösbar und zwar in der Form:

$$(4.)\qquad \begin{cases} x = a_1' x' + b_1' y' + c_1' z' \\ y = a_2' x' + b_2' y' + c_2' z' \\ z = a_3' x' + b_3' y' + c_3' z', \end{cases}$$

wo $a_1' \ldots c_3'$ Quotienten von Unterdeterminanten von Δ und Δ selbst sind.

2.) Wir können nun fragen, wie sich die Raumgebilde bei diesen Affinitäten verändern. Haben wir zunächst eine Ebene:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

so ergibt sich als Gleichung des entsprechenden Gebildes, indem wir die Ausdrücke (4) für x, y, z eintragen:

$$A'x' + B'y' + C'z' + D' = 0,$$

wo sich die $A' \ldots D'$ in gewisser Weise aus den $A \ldots D$ und den Transformationskoeffizienten zusammensetzen; einer jeden Ebene entspricht also wieder eine Ebene. Da eine Gerade der Schnitt zweier Ebe-

neu ist, muß weiterhin notwendig jeder Geraden auch wieder eine Gerade entsprechen; Transformationen dieser letzteren Eigenschaft nennt Möbius Kollineationen, da sie die „Kollinearität" dreier Punkte, d. h. ihre Eigenschaft, auf einer Geraden zu liegen, erhalten. Die Affinität ist also eine spezielle Kollineation.

Untersucht man ebenso eine Fläche 2. Grades:

$$A x^2 + 2B xy + C y^2 + \ldots = 0,$$

so ergibt sich durch Einsetzen von (4) für x', y', z' ebenfalls eine quadratische Gleichung, d. h. die Affinität führt jede Fläche zweiten Grades wieder in eine solche und ebenso jede Fläche n^{ter} Ordnung wieder in eine n^{ter} Ordnung über.

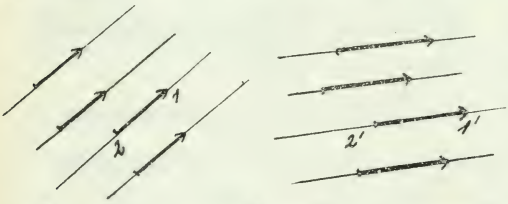
Es werden später die Flächen besonderes Interesse haben, die einer Kugel entsprechen. Zunächst sind es nach dem vorigen Flächen 2. Grades, da die Kugel eine spezielle Fläche dieser Art ist; da aber ferner alle Punkte der Kugel im Endlichen liegen und daher keiner ins Unendliche geworfen werden kann, müssen es notwendig ganz im Endlichen gelegene Flächen 2. Grades, das sind Ellipsoide, sein.

3) Wir wollen nun zusehen, was aus einem freien Vektor mit den Komponenten $X = x_1 - x_2$, $Y = y_1 - y_2$, $Z = z_1 - z_2$ wird; indem wir für die Punkte 1 und 2

die Transformationsformeln (2) ansetzen, erhalten wir für die Komponenten $X' = x_1' - x_2'$, $Y' = y_1' - y_2'$, $Z' = z_1' - z_2'$ der entsprechenden Strecke $1'\,2'$:

$$(5.) \qquad \begin{cases} X' = a_1 X + b_1 Y + c_1 Z \\ Y' = a_2 X + b_2 Y + c_2 Z \\ Z' = a_3 X + b_3 Y + c_3 Z \end{cases}.$$

Diese neuen Komponenten hängen also nur von den X, Y, Z, nicht von den Einzelwerten der Koordinaten x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 ab, d. h. sämtlichen Strecken $1\,2$ mit den gleichen Komponenten X, Y, Z entsprechen Strecken $1'\,2'$ mit den gleichen Komponenten X', Y', Z' oder mit anderen Worten: Jedem freien Vektor entspricht bei der Affinität wieder ein freier Vektor. In dieser Aussage ist wesentlich mehr enthalten, als in der, daß jeder Geraden eine Gerade entspricht. Nehmen wir nämlich auf zwei parallelen Geraden gleiche und gleichgerichtete Abschnitte an, so stellen diese denselben freien Vektor dar, also müssen auch die entsprechenden Strecken einen und denselben Vektor darstellen, d. h. parallel und gleich sein. Jedem Systeme paralleler Geraden entsprechen also wieder parallele Geraden, und gleichen Abschnitten auf ihnen entsprechen gleiche



Abschnitte. Diese Eigenschaften sind recht merkwürdig, da — wie man sich leicht überzeugen kann — die absolute Länge einer Strecke und die absolute Größe des Winkels zweier Geraden durch affine Transformation im allgemeinen geändert wird.

4.) Betrachten wir jetzt 2 Vektoren auf derselben Geraden, die bekanntlich durch Multiplikation mit einem Skalar auseinander hervorgehen; da x', y', z' in (5) homogene Funktionen von x, y, z sind, unterscheiden sich auch die entsprechenden Vektoren lediglich durch genau denselben Faktor, und das heißt nichts, als daß ihre Längen sich verhalten wie die Längen der ersten Vektoren. Wir können das auch so aussprechen: Zwei in einer Affinität einander entsprechende Geraden sind „ähnlich" auf einander bezogen, d. h. entsprechende Strecken haben konstantes Verhältnis.

5.) Endlich wollen wir noch 2 entsprechende Tetraederinhalte $T = (1, 2, 3, 4)$ und $T' = (1', 2', 3', 4')$ vergleichen. Es ist

$$6T = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1x_1+b_1y_1+c_1z_1, & a_2x_1+b_2y_1+c_2z_1, & a_3x_1+b_3y_1+c_3z_1, & 1 \\ a_1x_2+b_1y_2+c_1z_2, & a_2x_2+b_2y_2+c_2z_2, & a_3x_2+b_3y_2+c_3z_2, & 1 \\ a_1x_3+b_1y_3+c_1z_3, & a_2x_3+b_2y_3+c_2z_3, & a_3x_3+b_3y_3+c_3z_3, & 1 \\ a_1x_4+b_1y_4+c_1z_4, & a_2x_4+b_2y_4+c_2z_4, & a_3x_4+b_3y_4+c_3z_4, & 1 \end{vmatrix},$$

oder nach Anwendung des bekannten Multiplikations-

Theorems der Determinanten:

$$6\,T' = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix},$$

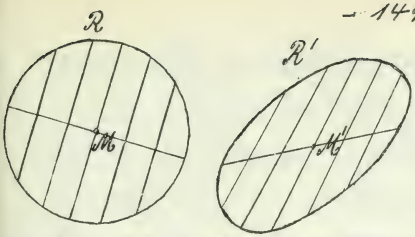
der erste Faktor ist Δ, der zweite $6\,T$, so daß wir haben:

$$T' = \Delta \cdot T,$$

d. h. bei affiner Transformationen multiplizieren sich alle Tetraederinhalte, und so überhaupt alle Rauminhalte (als Summen solcher) mit einem konstanten Faktor, der Substitutionsdeterminante Δ.

Diese wenigen Sätze, die wir so aus der analytischen Definition der Affinität gewonnen haben, reichen nun hin, um uns eine durchaus anschauliche geometrische Vorstellung dieser Transformation zu verschaffen. Dabei hat sich ihre Ableitung einfacher gestaltet, als man sie sonst vielfach zu geben pflegt, da wir in dem Vektorbegriff das richtige Hilfsmittel zur Behandlung dieser Affinitäten zur Hand hatten.

Das deutlichste geometrische Bild erhalten wir nun, wenn wir von einer Kugel im Raume R der x, y, z ausgehen; ihr wird, wie wir wissen, im Raume R' der x', y', z' ein Ellipsoid entsprechen. Betrachten wir nun ein System paralleler Sehnen der Ku-



gel, so müssen ihnen nach Nr. 3 auch parallele Sehnen des Ellipsoids entsprechen. Ferner müssen, da entsprechende Punktreihen ähnlich sind (Nr. 4), den Halbierungspunkten dieser Kugelsehnen auch die Halbierungspunkte der Ellipsoidsehnen entsprechen, und da jene auf einer Ebene liegen, müssen endlich wegen der Fundamentaleigenschaft Nr. 2 auch diese auf einer Ebene liegen, die Diametralebene des Ellipsoids heißt. Nun enthalten bekanntlich alle Diametralebenen der Kugel deren „Mittelpunkt" M, der jede durch ihn gehende Sehne (Kugeldurchmesser) halbiert. Daher halbiert auch der entsprechende Punkt M' jede durch ihn gehende Ellipsoidsehne und liegt in allen Diametralebenen; er heißt Mittelpunkt des Ellipsoids, jede Sehne durch ihn ein Durchmesser.

Es ist nun weiter von Wichtigkeit, zu sehen, was einem System von 3 aufeinander senkrechten Diametralebenen der Kugel entspricht. Ein solches hat offenbar die charakteristische Eigenschaft, daß jede der 3 Ebenen die der Schnittgeraden der beiden andern parallelen Sehnen halbiert. Diese Eigenschaft bleibt aber bei der affinen Transformation erhalten, und daher entspricht jedem der unendlich vielen Tripel aufeinander senk-

rechter Diametralebenen der Kugel ein Tripel von Diametralebenen des Ellipsoids von der Beschaffenheit, daß die der Schnittlinie irgend zweier der Ebenen parallelen Sehnen von der dritten halbiert werden. Solche Ebenentripel heißen konjugierte Diametralebenen, ihre Schnittlinien konjugierte Durchmesser.

Nun besitzt - ich darf das hier wohl als bekannt voraussetzen - ein Ellipsoid 3 sog. Hauptachsen, das sind 3 konjugierte Durchmesser, von denen jeder auf den beiden andern senkrecht steht. Ihnen entsprechen nach dem soeben Ausgeführten vermöge unserer Affinität in R 3 aufeinander senkrechte Durchmesser der Kugel. Wir nehmen nun der Einfachheit halber an, daß die Mittelpunkte der Kugel und des Ellipsoids Koordinatenanfangspunkte in R bezw. R' sind, und machen alsdann durch geeignete Drehung die genannten beiden senkrechten Achsentripel zur x', y', z'- bezw. x, y, z - Achsen in R' bezw. R; dabei bleibt es der Willkür überlassen, ob wir uns den Raum, oder das Koordinatensystem gedreht denken. Jedenfalls werden beide Operationen durch lineare homogene Koordinatensubstitutionen der früher ausführlich betrachteten speziellen Art dargestellt, und daher sind die Gleichungen unserer Transformation von R in R' auch in den neuen

Koordinaten wieder von der Form (2):

$$x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z$$
$$y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z$$
$$z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z \ .$$

Nun entspricht aber nach der neuen Definition der Achsen der x-Achse die x'-Achse, d. h. für $y = z = 0$ ist stets auch $y' = z' = 0$; daraus folgt aber $a_2 = a_3 = 0$, und ebenso folgt auch $b_1 = b_3 = c_1 = c_2 = 0$. Jede Affinität ist daher abgesehen von passenden Drehungen nichts als eine sog. „reine Affinität":

$$(6) \qquad \begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \mu y \\ z' = \nu z \end{cases},$$

oder wie die Physiker sagen, eine reine homogene Deformation (englisch: pure strain). Den Inhalt dieser Gleichungen kann man aber offenbar in einfachster Weise geometrisch vollständig beschreiben: Der Raum wird parallel der x-Achse auf das λ-fache ausgedehnt (bezw. kompriniert, wenn $|\lambda| < 1$ und noch gespiegelt, wenn $\lambda < 0$), und ebenso parallel den anderen beiden Koordinatenrichtungen auf das μ- bezw. ν-fache; wir können die reine Affinität also kurz als gleichförmige Streckung des Raumes nach drei zu einander senkrechten Richtungen bezeichnen und haben damit ein geometrisches Bild, wie

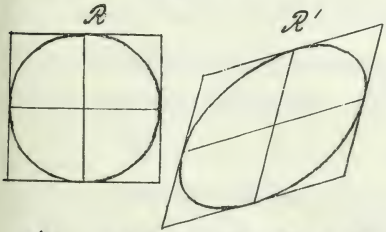
man es ausdrücklicher kaum verlangen kann.

Wollen wir schiefwinklige Parallelkoordinaten zulassen, so gestalten sich die Verhältnisse noch einfacher. Wir nehmen im Raume R, ohne den Nullpunkt zu ändern, irgend ein beliebiges, recht- oder schiefwinkliges Achsensystem x, y, z an, und benutzen im R' die 3 den Achsen vermöge der Affinität entsprechenden Geraden als Achsen eines – allgemein zu reden – schiefwinkligen Koordinatensystemes x', y', z'. Nun sind die Uebergangsformeln von rechtwinkligen zu schiefwinkligen Parallelkoordinaten bei festem Nullpunkt bekanntlich auch lineare homogene Gleichungen von der Form (2), und da die Zusammensetzung solcher Substitutionen stets wieder dieselbe Form hat, müssen die Gleichungen der Affinität auch bei Verwendung der soeben festgelegten schiefwinkligen Koordinaten die Gestalt (3) haben. Nach unserer Koordinatenbestimmung führen sie aber die 3 Achsen von R in die von R' über, und daher können wir durch genau die vorhin angestellte Ueberlegung schließen, daß die Gleichungen tatsächlich sich wieder auf die zuletzt angegebene Form (6) reduzieren. Verwenden wir also (schiefwinklige) Parallelkoordinaten in Bezug auf irgend zwei korrespondierende Achsentripel, so haben die Gleichungen der Affinität ohne wei-

seres diese einfache spezielle Form (6).

Ich will hier nicht weiter auf die Diskussion aller Eigenschaften der Affinitäten eingehen, die sich ohne jede Schwierigkeit anschließen ließe, sondern will Ihnen lieber zeigen, wozu man diese Transformationen eigentlich gebrauchen kann.

Zunächst ein Beispiel dafür, wie diese Transformationen ein ausgezeichnetes Hilfsmittel zur Ableitung neuer geometrischer Theoreme bilden; die oben erörterte affine Umwandlung der Kugel in ein Ellipsoid gestattet nämlich, aus zahlreichen Eigenschaften der Kugel neue Sätze über das Ellipsoid zu gewinnen. Konstruieren wir beispielsweise drei auf einander senkrechte Durchmesser der Kugel, und in ihren Endpunkten die 6 Tangentialebenen, so entsteht ein der Kugel umgeschriebener Würfel vom Rauminhalt $V = 8 r^3$, wenn r der



Kugelradius ist. Da Tangentialebenen der Kugel Tangentialebenen des Ellipsoids entsprechen müssen, so folgt mit Hilfe der besprochenen Sätze, daß die Affinität der beschriebenen Figur des Raumes R in R' ein dem Ellipsoid umschriebenes Parallelepiped zuordnet, dessen Seitenflächen an den Endpunkten dreier

konjugierter Durchmesser berühren und den zugehörigen Diametralebenen parallel sind, und dessen Kanten jenen Durchmessern bezüglich parallel sind. (Für der Ebene gilt entsprechendes für Kreis und Ellipse; vgl. Figur.) Diese Schlussweise läßt sich offenbar sofort auch umkehren: Jedem dem Ellipsoide umschriebenen Parallelepiped der beschriebenen Art entspricht ein der Kugel umschriebener Würfel, da den konjugierten Durchmessern des Ellipsoids 3 aufeinander senkrecht stehende Kugeldurchmesser entsprechen. Nun wissen wir aber (S. 148), daß bei der Affinität jeder Rauminhalt sich mit der Substitutionsdeterminante Δ multipliziert, und daher gilt für den Inhalt eines jeden dem Ellipsoid umschriebenen Parallelepipeds jener Art:

$$J' = J \cdot \Delta = 8 r^3 \cdot \Delta .$$

Diese Formel ist offenbar unabhängig davon, wie man das Parallelepiped speziell legt, das Parallelepiped hat also immer denselben konstanten Rauminhalt, gleichgültig vom welchem Tripel konjugierter Durchmesser man ausgeht.

Um diesen Wert zu bestimmen, konstruieren wir das Parallelepiped für das sog. Hauptachsentripel, dessen Geraden aufeinander senkrecht stehen, dieses wird rechtwinklig und hat daher den Inhalt $8 \cdot a \cdot b \cdot c$,

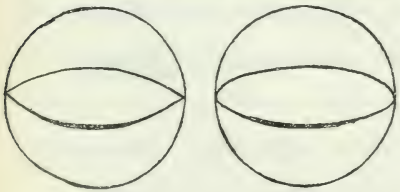
wenn $2a$, $2b$, $2c$ die Längen der Hauptachsen sind. Unser Theorem lautet also schließlich: Jedes einem Ellipsoid umschriebene Parallelepiped, dessen Seitenflächen 3 Konjugierten Diametralebenen parallel sind, hat ein und denselben Rauminhalt $V = 8.a.b.c$, wenn a, b, c die Längen der halben Hauptachsen sind. Um die Allgemeingültigkeit dieses Satzes für jedes Ellipsoid zu zeigen, hat man nun nur noch zu überlegen, daß sich jedes beliebige Ellipsoid aus der Kugel durch affine Transformation erzeugen läßt. Das ergibt sich aber sogleich aus der Form (6) der Gleichungen der Affinität; denn diese lassen erkennen, daß die Achsen des aus der Kugel entstehenden Ellipsoides sich wie $\lambda : \mu : \nu$ verhalten, wo λ, μ, ν drei willkürliche Zahlen sind.

Wenn ich mich auf dieses kleine Beispiel für die Anwendungen der Affinitäten in der theoretischen Geometrie beschränke, so will ich nun um so mehr betonen, daß diese Transformationen auch in der Praxis die größte Bedeutung haben.

Was da zunächst das Bedürfnis des Physikers angeht, so ist zu erwähnen, daß die affinen Transformationen in der Elastizitätslehre, der Hydrodynamik, überhaupt in jedem Zweige der Mechanik der Kontinua eine fundamentale Rolle spielen. Jedem, der

sich nur einmal mit diesen Dingen beschäftigt hat, ist es so geläufig, daß man es da immer, sowie man die Betrachtung auf hinreichend kleine Raumelemente beschränkt, mit homogenen linearen Deformationen zu tun hat; ich brauche das wohl kaum näher zu erläutern.

Ausführlicher will ich hier lieber die Anwendung auf das richtige Zeichnen behandeln, das ja der Physiker ebenso dringend wie der Mathematiker braucht. Soweit es sich da um Parallelprojektionen handelt, liegen nämlich immer nur affine Transformationen des Raumes zu Grunde. Auf diesem Gebiete des richtigen Zeichnens wird nun leider ungemein viel gesündigt; sie können sowohl in mathematischen Büchern bei der Abbildung räumlicher Figuren, als auch in Physikbüchern bei der Darstellung von Apparaten ganz unglaubliche Zeichnungen finden. Besonders häufig findet man, um nur ein Beispiel zu nennen, daß bei der Abbildung einer Kugel der Aequator als Kreisbogenzweieck gezeichnet wird; natürlich ist das durchaus verkehrt, da er in Wahrheit

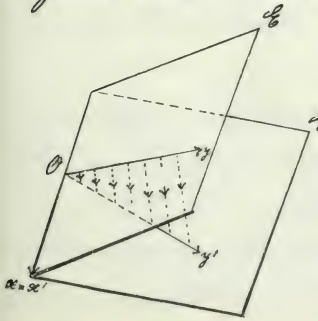


sich stets als Ellipse darstellen muß, wie wir sogleich sehen werden.

Das Prinzip des geometrisch richtigen Zeichnens ist

nun das, daß die abzubildende Figur durch geradlinige Strahlen von einem Punkt aus auf die Zeichenebene projiziert wird. Am einfachsten werden die Verhältnisse, wenn man sich jenen Zentralpunkt ins Unendliche hinausgerückt denkt, d. h. die Abbildung durch ein paralleles Strahlenbündel vollzieht; dies ist der Fall, der uns hier interessiert. Übrigens betreten wir hiermit das Gebiet der darstellenden Geometrie; ich will diese hier keineswegs systematisch vortragen, sondern will Ihnen nur zeigen, wie sie sich in das Gebäude der allgemeinen Geometrie einordnet, und werde daher auf die Details der Beweise nicht immer eingehen können.

Beginnen wir damit, die Abbildung einer ebenen Figur, d. h. die Projektion einer Ebene $\mathfrak{E}$ auf eine andere $\mathfrak{E}'$ vermöge eines Parallelstrahlenbündels zu untersuchen. Wir legen dann den Koordinatenanfang O in die Schnittgerade von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ und die x-Achse in ihre Richtung; die y-Achse legen wir in $\mathfrak{E}$ beliebig, z. B. senkrecht zur x-Achse, durch O, und bestimmen die y'-Achse als ihre Projektion auf $\mathfrak{E}'$ durch die Strahlen des projizierenden Parallelstrahlenbündels, so daß wir in $\mathfrak{E}'$ ev. schiefwinklige Parallelkoordinaten



haben. Dann stehen die Koordinaten zweier korrespondierender Punkte in $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ in der Beziehung:

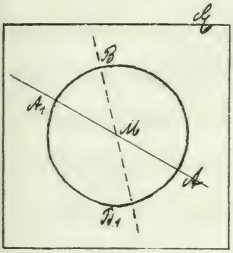
$$x' = x$$

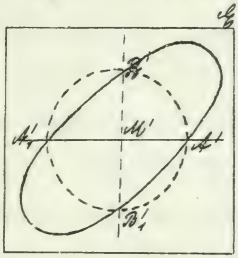
$$y' = \mu \cdot y,$$

wo μ eine von der gegebenen Lage der Ebenen und des Parallelstrahlenbündels abhängige Konstante ist; es liegt also tatsächlich affine Transformation vor. Der Beweis dieser Gleichungen ist äußerst einfach, so daß ich mich bei ihm wohl kaum aufzuhalten brauche. Übrigens sind diese Gleichungen gegenüber der allgemeinen Form (6) der Affinitätsgleichungen insofern spezialisiert, als $\lambda = 1$, also x' genau gleich x ist; das liegt natürlich daran, daß die x-Achse Schnittgerade von Original- und Bildebene ist, also jeder Punkt auf ihr mit seinem Bilde zusammenfällt. Alle wesentlichen Eigenschaften unserer Abbildung erhalten wir natürlich sofort, wenn wir die früher für den Raum abgeleiteten Sätze für die Ebene spezialisieren; so entspricht z. B. jedem Kreis in $\mathfrak{E}$ eine Ellipse in $\mathfrak{E}'$ u. s. f.

Es liegt nun nahe, die umgekehrte Frage aufzuwerfen: Kann man irgend zwei in gegebener Weise affin aufeinander bezogene Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}'$ so zueinander legen, daß die eine durch Parallelprojektion aus der anderen entsteht? Um das zu entscheiden, gehen

wir von einem beliebigen Kreise in $\mathfrak{C}$ und der entsprechenden Ellipse in $\mathfrak{C}'$ aus (wir könnten statt dessen auch zwei beliebige entsprechende Ellipsen verwenden); es entspricht dann dem Kreismittelpunkt M der Ellipsenmittelpunkt M'. Wir legen nun den Kreis von $\mathfrak{C}$ in die Ebene $\mathfrak{C}'$ mit dem Zentrum nach M', so wird er die Ellipse entweder in 4 Punkten schneiden, oder keinen Punkt mit ihr gemein haben; den Uebergangsfall der Berührung wollen wir hier der Einfachheit halber nicht ausdrücklich berücksichtigen.





Im ersten Falle, den die Figur zeigt, fassen wir die beiden Ellipsendurchmesser $A'A_1'$ und $B'B_1'$ in $\mathfrak{C}'$ nach den 4 Schnitten auf; ihnen entsprechen vermöge unserer Affinität zwei Kreisdurchmesser $A\,A_1$ und $B\,B_1$ in $\mathfrak{C}$, denen sie – so haben wir sie ja konstruiert – obendrein noch gleich sind. Daher sind nach einer allgemeinen Eigenschaft der Affinitäten (Nr. 4. S. 147) überhaupt entsprechende Strecken auf den Geraden $A\,A_1$ und $A'A_1'$, bezw. $B\,B_1$ und $B'B_1'$ gleich. Legen wir nun die Ebene $\mathfrak{C}$ so auf $\mathfrak{C}'$, daß M nach M' fällt und eines dieser Geradenpaare, etwa

$A A_1$ und $A' A_1'$ zusammenfallen, und drehen wir nun diese Gerade als Achse in den Raum hinaus, so haben wir eine affine Transformation der beiden Ebenen, bei der jeder Punkt der Schnittgeraden sich selbst entspricht. Man kann dann leicht zeigen – ich führe wieder nun den Beweis nicht im einzelnen aus –, daß, gleichgültig, welchen Winkel die Ebenen bilden, die Verbindungslinien entsprechender Punkte sämtlich untereinander parallel sind, d. h. daß sich die Affinität der Ebenen in der Tat durch Parallelprojektion erzeugen läßt.

Schneidet unser Kreis aber die Ellipse nicht, d. h. ist sein Radius kleiner als die kleine, oder größer als die große Halbachse der Ellipse, so werden – in der Sprache der Analysis – jene beiden gemeinsamen Durchmesser imaginär, und für den Zeichner sind sie überhaupt nicht vorhanden; die ganze Konstruktion ist unmöglich. Dann bleibt, wenn man doch zu einer Herstellung durch Parallelprojektion gelangen will, nichts übrig, als eine Aehnlichkeitstransformation zu Hilfe zu nehmen, und den Kreis soweit zu vergrößern oder zu verkleinern, bis der vorige Fall eintritt; solche Aehnlichkeitstransformationen verwendet man ja als „Umzeichnen des Bildes in einen anderen Maßstab" beim

Entwerfen von Bildern ohnehin stets. Wir gelangen so schließlich zu dem Haupttheorem, daß sich jede affine Verwandtschaft zweier Ebenen auf unendlich viele verschiedene Weisen durch Kombination einer Aehnlichkeitstransformation und einer Parallelprojektion herstellen läßt.

Viel interessanter und wichtiger als diese Abbildung zweier Ebenen ist das Problem der Abbildung des ganzen Raumes auf eine Ebene durch Parallelprojektion, zu dem wir jetzt übergehen; wir wollen dabei, um Weitläufigkeiten zu vermeiden, von vornherein eine Vergrößerung oder Verkleinerung des Bildes durch Aehnlichkeitstransformation stets mit zulassen. Diese Abbildung heißt in der darstellenden Geometrie das Verfahren der Axonometrie und spielt in der Praxis eine außerordentlich bedeutende Rolle. Jede Photographie ist nahezu eine Axonometrie, wenn der abgebildete Gegenstand nur hinreichend weit vom Apparat entfernt war (allgemein ist sie eine Zentralprojektion); namentlich wird die genaue Axonometrie aber in allen Büchern benutzt, wenn man räumliche geometrische Figuren, physikalische Apparate, Architekturteile u. dgl. abbilden will. Sehr interessante Beispiele aller möglichen solchen axonometrischen Darstellungen, die auch für den Unterricht unmittelbar

brauchbar sind, finden Sie in dem interessanten Leitfaden der Projektionslehre von C. H. Müller und P. Kreusler; [1] da sehen Sie z. B. wie man eine Tangentenbussole, einen Frommelinduktor, Krystalle der verschiedensten Art, oder aus der Biologie Zellgewebe oder einen Bienenstock, und vieles andere axonometrisch korrekt zeichnet.

Lassen Sie mich nun sogleich den Satz angeben, der diese Axonometrie mit unseren vorhergehenden Erörterungen über Affinitäten in Zusammenhang bringt: Die Abbildung des Raumes vermittelst Parallelprojektion und Ähnlichkeitstransformation (Axonometrie) auf eine Ebene wird analytisch durch eine affine Transformation mit verschwindender Determinante dargestellt:

$$(1)\qquad \begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{cases}, \quad \text{wo } \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0;$$

Sie sehen, wie wichtig auch diese „ausgearteten" Transformationen sind, die man leider vielfach ungebührlich vernachlässigt. Weiter gilt nämlich, daß auch jede solche Substitution mit $\Delta = 0$ eine axonometrische Abbildung ergibt; dabei sollen nur nicht etwa gar alle Koeffizienten der Substitution oder auch nur alle Un-

1) Ein Übungsbuch der konstruierenden Stereometrie. Leipzig 1903.

derdeterminanten verschwinden, da dann noch weitere Ausartungen, die Sie selbst nach dem folgenden Muster untersuchen mögen, eintreten.

Ueberzeugen wir uns nun den Beweis dieses Satzes zu führen, zunächst, daß tatsächlich alle durch (1) gelieferten Punkte $x'|y'|z'$ (für beliebiges x, y, z) auf einer Ebene liegen, d. h. daß es 3 Zahlen k_1, k_2, k_3 gibt, so daß identisch in x, y, z:

$$k_1 x' + k_2 y' + k_3 z' = 0. \qquad (2)$$

Diese Identität ist nun äquivalent mit den 3 homogenen linearen Gleichungen:

$$\begin{aligned} k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 &= 0 \\ k_1 b_1 + k_2 b_2 + k_3 b_3 &= 0 \\ k_1 c_1 + k_2 c_2 + k_3 c_3 &= 0, \end{aligned}$$

welche bekanntlich gerade dann die Verhältnisse $k_1 : k_2 : k_3$ eindeutig bestimmen, wenn die Koeffizientendeterminante Δ verschwindet, ohne daß alle 9 Unterdeterminanten Null sind; daher liegen tatsächlich alle Bildpunkte $x'|y'|z'$ in der einen so bestimmten Ebene (2).

Wir wollen nun im Raume R' derart ein neues rechtwinkliges Koordinatensystem einführen, daß diese Ebene (2) zur x'-y' Ebene ($z' = 0$) wird. Dann muß jedem Punkte des R ein Punkt aus $z' = 0$ entsprechen, und die Gleichungen unserer Affinität in den neuen

Koordinaten haben daher einfach die Form:

$$(3) \qquad \begin{cases} x' = A_1 x + B_1 y + C_1 z \\ y' = A_2 x + B_2 y + C_2 z \\ z' = 0. \end{cases}$$

Hierbei sind die 6 Konstanten $A_1 \ldots C_2$ durchaus willkürlich, da der speziellen Form der letzten Zeile wegen stets die Determinante verschwindet; nur dürfen nicht alle 3 Unterdeterminanten aus ihnen verschwinden (d. h. es darf nicht $A_1 : B_1 : C_1 = A_2 : B_2 : C_2$ sein), da sonst die anfangs ausgeschlossene weitere Ausartung vorliegt.

Ich will nun den Beweis, daß die so analytisch definierten Abbildungen des Raumes R auf die x'-y'-Ebene E' geometrisch tatsächlich mit den oben definierten axonometrischen Projektionen identisch sind, Ihnen in einzelnen Schritten darstellen, indem ich zugleich die Haupteigenschaften dieser Abbildung (3) ähnlich wie früher (S. 143) die der Affinitäten mit nichtverschwindender Determinante entwickle.

1) Zunächst ist klar, daß jedem Punkte $x|y|z$ des R eindeutig ein Punkt $x'|y'$ in E' entspricht. Geben wir umgekehrt einen Punkt $x'|y'$ in E', so besagen die Gleichungen (3), daß der entsprechende Punkt $x|y|z$ in R auf 2 bestimmten Ebenen liegt. Da deren Koeffizienten unserer Annahme nach nicht proportional sind, haben

sie eine im Endlichen gelegene Schnittgerade und deren sämtliche Punkte müssen dem gegebenen Punkte $x'|y'$ in unserer Transformation entsprechen. Variieren wir nun x', y' so verschiebt jede dieser beiden Ebenen sich je parallel mit sich selbst, da die Koeffizienten $A_1 \dots C_1$ bezw. $A_2 \dots C_2$ unverändert bleiben. Also bleibt auch ihre Schnittgerade sich selbst parallel und wir haben das Resultat, daß jedem Punkte von E' die sämtlichen Punkte je einer von zweifach unendlich vielen Parallelgeraden in R entsprechen. Hierin ist der Zusammenhang unserer Abbildung mit der Parallelprojektion des Raumes bereits angedeutet.

2.) Genau wie unter Nr. 3 (S. 145) bei der allgemeinen Affinität finden wir für die Komponenten der einem freien Vektor x, y, z entsprechenden Strecke x', y' in E' wiederum die Formeln (3), nämlich

$$(4.) \qquad \begin{cases} x' = A_1 x + B_1 y + C_1 z \\ y' = A_2 x + B_2 y + C_2 z \\ z' = 0 \end{cases}.$$

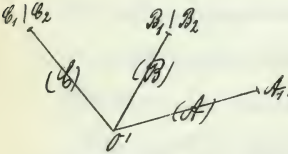
Das besagt aber wieder, daß jedem freien Vektor in R ein freier Vektor x', y' der Bildebene E' entspricht, oder genauer: Verschiebt man einen Linienteil im Raume R irgendwie parallel mit sich unter Aufrechterhaltung seiner Größe und seines Sinnes, so bewegt sich der entsprechende Linienteil in der Ebene E' gleichfalls mit konstanter

Länge und Richtung Sinn parallel mit sich.

3.) Wir betrachten speziell den Einheitsvektor auf der x-Achse $x = 1$, $y = z = 0$, der vom Punkte $0|0|0$ nach dem $1|0|0$ geht. Ihm entspricht in $\mathfrak{E}'$ nach (4) der Vektor

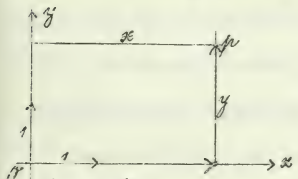
$$x' = A_1 \,, \quad y' = B_1 \,,$$

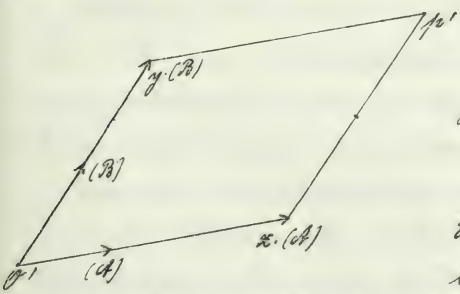
der vom Anfangspunkt O' nach dem Punkt mit diesen Koordinaten $A_1 | B_1$ geht. Genau ebenso entsprechen den Einheitsvektoren der y- und z-Achse die beiden Vektoren von O' nach den Punkten $B_1 | B_2$ bezw. $C_1 | C_2$.



Diese drei Vektoren in $\mathfrak{E}$ – nennen wir sie kurz (A), (B), (C) – können nun ganz beliebig angenommen werden, denn sie legen durch die Koordinaten ihrer Endpunkte gerade die willkürlichen 6 Parameter der Affinität (3) fest, so daß durch sie die Abbildung vollkommen bestimmt ist; nur dürfen sie nicht etwa alle drei in die gleiche Gerade fallen, und wir wollen uns der Einfachheit halber vorstellen, daß auch keine zwei von ihnen in einer Geraden liegen. Die 3 Einheitsvektoren auf den Koordinatenachsen des R werden also – das ist das Resultat – auf 3 beliebige Vektoren durch den Anfangspunkt O' in $\mathfrak{E}'$ abgebildet, die ihrerseits die Affinität vollkommen bestimmen.

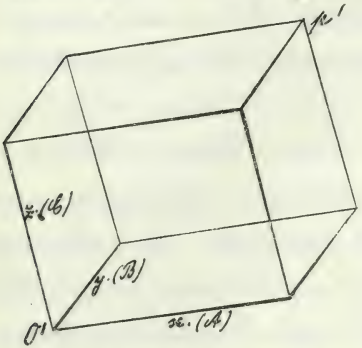
4.) Um nun auch geometrisch aus (A), (B), (C) die Abbildung herzustellen, gehen wir zunächst von irgend einem Punkte p (x | y | z = 0) der x-y-Ebene aus; wir können sagen, daß wir ihn aus den Einheitsvektoren der x- und y-Achse erhalten, indem wir den ersten mit der skalaren Zahl x, den zweiten mit y multiplizieren, und diese Produkte addieren. Diese Konstruktion können wir aber sofort auf E' übertragen, da die Beziehung zwischen der x-y-Ebene und E' offenbar eine gewöhnliche zweidimensionale Affinität (mit nicht verschwindender Determinante) ist. Wir erhalten also den Bildpunkt p' von p, indem wir den Vektor (A) mit x, den Vektor (B) mit y skalar multiplizieren und die Produkte nach dem Parallelogrammgesetz addieren. So können wir in E' das Abbild der x-y-Ebene sowie jeder Figur in ihr punktweise konstruieren.





5.) Uebertragen wir diese Ueberlegungen auf einen beliebigen Punkt des Raumes R, so ergibt sich leicht: Das Bild p' eines Punktes p mit den Koordinaten x, y, z entsteht durch Vektoraddition der

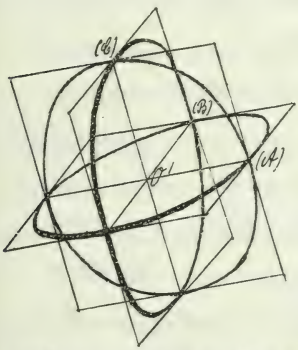
bezüglich mit x, y, z multiplizierten Vektoren $(\mathfrak{a}), (\mathfrak{b}), (\mathfrak{c})$ nach dem Parallelogrammgesetz. Wegen der Kommutativität der Addition kann man dies auf 1. 2. 3 – 6 verschiedene Arten ausführen, und erhält p' so als Endpunkt von 6 verschiedenen, aus parallelen und gleichen Strecken bestehenden Linienzügen; die von ihnen gebildete Figur ist offenbar das



Abbild desjenigen rechtwinkligen Parallelipeds des Raumes R, das von den 3 Koordinatenebenen und den durch p gelegten Parallelebenen zu ihnen begrenzt wird. Wir sind von Jugend auf gewohnt, derartige ebene Figuren sogleich als Bilder räumlicher aufzufassen, besonders wenn dem Anschein noch durch Verstärkung der vorn gelegenen Kanten nachgeholfen ist. Diese Gewohnheit ist so stark, daß uns diese Abbildung geradezu als trivial erscheint, während sie tatsächlich doch ein sehr bemerkenswertes Theorem darstellt.

6.) Mit Hilfe dieser letzten Konstruktion können wir nun in $\mathfrak{E}'$ das Bild jeder Raumfigur, d. h. aller ihrer Punkte herstellen. Ich will dafür nur ein Beispiel betrachten: Haben wir eine Kugel um den

Anfangspunkt O, so werden wir vor allem Dingen die Kreise auffassen, in denen sie die Koordinatenebenen schneidet. Der Schnittkreis in der x-y-Ebene beispielsweise hat die Einheitsvektoren der x- und y-Achse zu konjugierten, d. h. auf einander senkrechten Durchmessern; da eine affine Beziehung statt hat, entspricht ihm also eine Ellipse, die O' zum Mittelpunkt und die Vektoren (A) und (B) zu konjugierten Durchmessern hat, die also dem aus den Vektoren 2.(A) und 2.(B) gebildeten Parallelogramm eingeschrieben ist. Ebenso haben die den anderen beiden Schnittkreisen entsprechenden Ellipsen O' zum Mittelpunkt und (B) und (C), bezw. (A) und (C) zu konjugierten Durchmessern.



7.) Nachdem wir uns so von der Natur dieser Affinitäten (3) mit verschwindender Determinante ein vollständiges Bild gemacht haben, haben wir noch den letzten entscheidenden Schritt in unserer Betrachtung zu thun, nämlich zu zeigen, daß jene Affinitäten tatsächlich in der früher behaupteten Weise durch axonometrische Projektion entstehen. Dabei kommt hauptsächlich der sog. Fundamentalsatz der Axonometrie von Pohlke in Betracht, den K. Pohlke,

Professor der darstellenden Geometrie an der Bauakademie in Berlin, 1853 entdeckt und 1860 in seinem Lehrbuch der darstellenden Geometrie [1] veröffentlicht hat. In einer Arbeit vom Jahre 1863 [2] hat H. A. Schwarz zum ersten Male einen elementaren Beweis dieses Satzes publiziert und gleichzeitig dessen interessante Entdeckungsgeschichte ausführlich geschildert, die Sie dort nachlesen mögen.

Pohlke selbst definiert nun die Axonometrie nicht analytisch, sondern geometrisch als Abbildung des Raumes durch Parallelstrahlen (noch verbunden mit einer Ähnlichkeitstransformation); sein Theorem sagt dann aus, daß durch solche Abbildung die Einheitsvektoren auf den Koordinatenachsen des Raumes in 3 beliebige Vektoren der Ebene E' durch O' übergehen. Daß unsere analytisch definierte Abbildung tatsächlich zu 3 beliebigen solchen Vektoren führt, konnten wir in Nr. 3 leicht einsehen; für uns ist daher die tiefliegende Aussage des Pohlkeschen Satzes, daß man unsere analytisch definierte Abbildung (3) geometrisch durch Parallelprojektion und Maßstabänderung erhält, wobei die in Nr. 1. erwähnten Parallelgeraden zu Projektionsstrahlen werden.

8.) Ich möchte nun noch den ungefähren Gang für ei-

1.) 2 Abteil. 4 Aufl. Berlin 1876. – Der Satz findet sich Abteil 1. pag. 109.

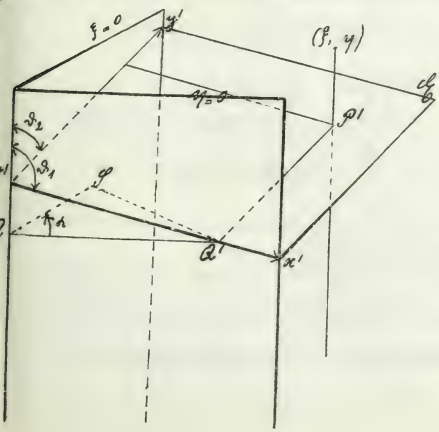
2.) Journ. f. reine u. angew. Math. Bd. 63, pag. 309 = Ges. mathem. Abhandl. Bd. II (Berlin 1890). pag. 1.

neuen direkten analytischen Beweis des Satzes in dieser Form andeuten. Fassen wir die beiden Scharen von Parallelebenen des R

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z = \xi$$
$$A_2 x + B_2 y + C_2 z = \eta$$

auf (wo ξ, η variable Parameter), so bestimmt jedes Wertepaar ξ, η eine der gesamten Parallelgeraden; die Aufgabe ist, in den Raum R eine Bildebene $\mathfrak{E}'$ und in sie ein rechtwinkliges Koordinatensystem x', y' mit einem passenden Maßstab so zu legen, daß jeder Strahl ξ, η die Bildebene $\mathfrak{E}'$ im Punkte $x' = \xi$, $y' = \eta$ durchstößt; dann wäre die Abbildung (3) tatsächlich in der gewünschten Weise geometrisch hergestellt.

Zu diesem Ende müssen zunächst die Ebenen $\xi = 0$, $\eta = 0$ jene Ebene $\mathfrak{E}'$ in den Koordinatenachsen $O'y'$ bezw. $O'x'$, d. h. in aufeinander senkrechten Geraden schneiden; sind ϑ_1, ϑ_2 die Winkel dieser Achsen gegen die Gerade $\xi = \eta = 0$, die die Lage von $\mathfrak{E}'$ bestimmen, und bezeichnen wir mit α den (bekannten) Winkel der Ebenen $\xi = 0$, $\eta = 0$, so ist nach dem Cosinussatz der sphärischen Trigonometrie, an-



gewandt auf das von diesen beiden Ebenen und $\mathfrak{E}'$ gebildete Dreikant, der Cosinus des Winkels der Geraden $O'x'$, $O'y'$ gleich $\cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 + \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cos\alpha$, und daher ist dieser Winkel ein Rechter, wenn

$$(\alpha) \qquad \operatorname{ctg}\vartheta_1 \cdot \operatorname{ctg}\vartheta_2 = -\cos\alpha .$$

Nun schneidet jede Ebene $A_1 x + B_1 y + C_1 z = \xi$ in $\mathfrak{E}'$ eine Gerade $x' = \text{Const.}$ ein; ist A' ihr Schnitt mit der x'-Achse, so ist der entsprechende x'-Wert bis auf den noch zu bestimmenden Maßstabfaktor λ des Koordinatensystems in $\mathfrak{E}'$ gleich $O'A'$. Fällen wir nun die Lote $A'S$ und $A'R$ auf die Ebene $\xi = 0$ bezw. die Gerade $\xi = \eta = 0$, so ist

$$O'A' = \frac{A'R}{\sin\vartheta_1} , \qquad A'R = \frac{A'S}{\sin\alpha} ,$$

und da $A'S$ sich als senkrechter Abstand der beiden Ebenen $A_1 x + B_1 y + C_1 z = 0$ und $A_1 x + B_1 y + C_1 z = \xi$ nach einer bekannten Formel der analytischen Raumgeometrie leicht ausdrückt, so folgt schließlich

$$x' = \lambda \cdot O'A' = \lambda \frac{\xi}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sin\vartheta_1 \cdot \sin\alpha} .$$

Ganz analog ergibt sich als y'-Koordinate der von der Ebene $A_2 x + B_2 y + C_2 z = \eta$ in $\mathfrak{E}'$ eingeschnittenen Punkte

$$y' = \lambda \cdot \frac{\eta}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2} \cdot \sin\vartheta_2 \cdot \sin\alpha} .$$

Damit nun, wie wir es ja wünschen, jeder durch die Parameterwerte ξ, η bestimmte Parallelstrahl $\mathfrak{E}'$ in dem Punkte $x' = \xi$, $y' = \eta$ durchstoßen, muß also

(b) $\lambda = \sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2}\cdot\sin\vartheta_1\cdot\sin\alpha = \sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2}\cdot\sin\vartheta_2\cdot\sin\alpha$

sein, was für ϑ_1, ϑ_2 die zweite Gleichung

(c) $\sin\vartheta_1\cdot\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2} = \sin\vartheta_2\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2}$

ergibt. Eine sehr einfache Rechnung zeigt, daß die Gleichungen (a), (c) nur ein einziges reelles bis auf Vorzeichen bestimmtes Lösungspaar $\sin\vartheta_1$, $\sin\vartheta_2$ besitzen, d. h. es gibt im wesentlichen nur eine (und die in Bezug auf die gemeinsame Normalebene von $\xi=0$, $\eta=0$ symmetrische) Lage der Ebene $\mathfrak{E}'$, in der die Affinität $x'=\xi$, $y'=\eta$ axonometrisch realisiert ist, wofern man den Maßstab des rechtwinkligen Koordinatensystems in $\mathfrak{E}'$ gemäß (b) wählt. Man kann diesen ganzen Gedankengang auch mehr geometrisch fassen, wenn man von der Bedingung ausgeht, daß die Einheitspunkte der x'- und y'-Achse auf die Geraden $\xi=1$, $\eta=0$ und $\xi=0$, $\eta=1$ fallen; dann hat man die Aufgabe, eine Ebene $\mathfrak{E}'$ zu legen, die ein gegebenes dreiseitiges Prisma in einem rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck schneidet.

Nach dieser ausführlichen Darlegung brauche ich auf die früher gleichfalls schon ausgesprochene Umkehrung wohl kaum mehr näher einzugehen: daß jede axonometrische Projektion eine affine Transformation mit verschwindender Determinante darstellt. Man wird das leicht verifizieren, indem man die Ebene

$\mathfrak{E}'$ beliebig in unseren Raum R hineinlegt, und zunächst das von den Ebenen $\xi = 0$, $\eta = 0$ in $\mathfrak{E}'$ eingeschnittene schiefwinklige Koordinatensystem benutzt, um dann durch eine lineare homogene Substitution zu dem beliebig in $\mathfrak{E}'$ gegebenen rechtwinkligen Koordinatensystem überzugehen.

Indem ich nun endlich dieses Kapitel von den Affinitäten beschließe, will ich Ihnen das Entstehen der axonometrischen Abbildung noch gewissermaßen experimentell dadurch anschaulich machen, daß ich durch den Lichtbogen unserer Projektionslampe (den wir uns unendlich fern denken mögen) Schattenbilder einiger einfacher Modelle, (Quadrat, Kreis, Ellipse, Würfel) auf den Projektionsschirm werfe; Sie finden da genau unsere Resultate und Figuren bestätigt, und können insbesondere auch den Pohlkeschen Satz leicht experimentell nachprüfen, indem Sie das Schattenbild dreier aufeinander senkrechter Strecken durch Bewegung des Modelles sowohl wie auch der Projektionsebene allen möglichen Aenderungen unterwerfen.

Wir gehen damit zu einem neuen Kapitel über, das von den allgemeineren, die Affinitäten als Spezialfälle umfassenden

II. Projektiven Transformationen

handelt. Auch hier möchte ich bald den dreidimensionalen Raum vornehmen, und stelle wieder

1) die analytische Definition an die Spitze. Wir setzen jetzt x', y', z' nicht mehr als ganze, sondern als gebrochene lineare Funktionen von x, y, z, an, die nur sämtlich – das ist ganz wesentlich – einen und denselben Nenner haben müssen:

$$(1.)\qquad \begin{aligned} x' &= \frac{a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1}{a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4} \\ y' &= \frac{a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2}{a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4} \\ z' &= \frac{a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3}{a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4} \end{aligned} .$$

2) Jedem Punkte x, y, z entspricht danach ein bestimmter endlicher Punkt x', y', z', wofern nur der gemeinsame Nenner von Null verschieden ist. Nähert sich aber x, y, z der Ebene $a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 = 0$, so entfernt sich – das ist das Neue gegenüber der Affinität – der entsprechende Punkt x', y', z' ins Unendliche, er „entflieht" gewissermaßen; man nennt jene Ebene daher Fluchtebene, ihre Punkte Fluchtpunkte, und sagt, daß sie in der projektiven Transformation dem Unendlichweiten des Raumes, der sog. unendlichfernen Ebene entspricht.

3) Bei der Behandlung der hier entstehenden Probleme ist es bekanntlich sehr zweckmäßig homogene

Koordinaten einzuführen, d. h. an Stelle der drei Punktkoordinaten x, y, z vier Größen ξ, η, ζ, τ zu setzen, die durch die Gleichungen

$$x = \frac{\xi}{\tau}, \quad y = \frac{\eta}{\tau}, \quad z = \frac{\zeta}{\tau}$$

definiert werden; diese vier Größen sollen unabhängig von einander veränderlich sein, nur sollen sie nicht alle 4 gleichzeitig verschwinden, und keine von ihnen soll jemals unendlich werden. Jedem Punkte x, y, z gehören dann noch unendlich viele Wertsysteme $\varrho\xi, \varrho\eta, \varrho\zeta, \varrho\tau$ zu, wo ϱ ein willkürlicher Faktor ist; umgekehrt legt jedes Wertsystem ξ, η, ζ, τ, wo $\tau \neq 0$, einen bestimmten endlichen Punkt x, y, z fest (und alle Wertsysteme $\varrho\cdot\xi, \varrho\cdot\eta, \varrho\cdot\zeta, \varrho\cdot\tau$ denselben Punkt). Nur wenn $\tau = 0$ ist, wird mindestens einer der Quotienten x, y, z unendlich, und man trifft demgemäß die Festsetzung, daß jedes Wertsystem $\xi, \eta, \zeta, \tau = 0$ einen „unendlichfernen Punkt" bedeuten soll, und zwar alle Systeme $\varrho\cdot\xi, \varrho\cdot\eta, \varrho\cdot\zeta, 0$ einen und denselben Punkt; hiermit sind in präzieser analytischer Weise die Punkte eingeführt, die man als „unendlichferne" den gewöhnlichen endlichen Punkten hinzuzufügen pflegt.

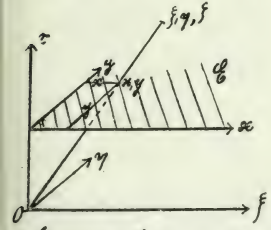
Das Operieren mit homogenen Koordinaten hat jedenfalls für den Anfänger und manchmal auch weiterhin etwas Unbehagliches; ich glaube, daß das gewis-

sozusagen Unbestimmte, Fließende dieser Größen, das der willkürliche Faktor ϱ mit sich bringt, daran schuld ist, und es mag vielleicht zur Beseitigung dieses Unbehagens beitragen, wenn das deutlich ausgesprochen wird.

Zu demselben Zwecke wird es gut sein, hier einige Erörterungen über gewisse geometrische Vorstellungen einzuschalten, die man mit den homogenen Koordinaten verbinden kann. Ich spreche da zunächst nur von einer Ebene $\mathfrak{E}$, wo wir für die zwei rechtwinkligen Koordinaten

$$x = \frac{\xi}{\tau}, \quad y = \frac{\eta}{\tau}$$

setzen. Wir wollen nun ξ, η, τ als rechtwinklige Koordinaten eines Raumes deuten und in diesem Raume die Parallelebene $\tau = 1$ zur ξ-η-Ebene als die Ebene $\mathfrak{E}$ auffassen, indem wir in ihr $x = \xi$, $y = \eta$ setzen. Verbinden wir nun den Punkt $x|y$ von $\mathfrak{E}$ mit O durch einen geradlinigen Strahl, so ist auf ihm bekanntlich $\frac{\xi}{\tau}$ und $\frac{\eta}{\tau}$ Konstant, und zwar muß



$$\frac{\xi}{\tau} = x, \quad \frac{\eta}{\tau} = y$$

sein, da ja gerade für $\tau = 1$, $\xi = x$, $\eta = y$ sein sollte. Die Einführung homogener Koordinaten bedeutet hiernach einfach die Abbildung der Ebene $\mathfrak{E}$ auf das sie aus dem Nullpunkt O des dreidimensionalen Hilfsraumes

projizierende Strahlenbündel: die homogenen Koordinaten eines Punktes sind die Raumkoordinaten der Punkte des ihn projizierenden Strahles dieses Bündels; der jedem Punkt von $\mathfrak{E}$ die unendlich vielen Punkte des Strahles zugehören, ist die Bedeutung der Unbestimmtheit der homogenen Koordinaten damit völlig klargestellt. Daß das Wertesystem $\xi = \eta = \tau = 0$ ausgeschlossen ist, hat seinen geometrischen Grund darin, daß durch den Punkt O allein noch kein Strahl und daher kein Punkt in $\mathfrak{E}$ bestimmt ist. Auch daß wir keine unendliche Werte ξ, η, τ brauchen, ist selbstverständlich, da wir alle Strahlen bereits durch Verbindung von O mit im Endlichen gelegenen Punkten erhalten. Und endlich wird anschaulich, wie wir das Unendlichferne der Ebene vermeiden, indem wir es durch die in $\tau = 0$ gelegenen Parallelstrahlen durch O ersetzen.

Auch die bekannte Sprechweise von der unendlich fernen Geraden erhält hier einen anschaulichen geometrischen Inhalt. Analytisch ist sie nur der Ausdruck der abstrakten Analogie, daß alle „unendlich fernen Punkte" der linearen Gleichung $\tau = c$ genügen, genau wie jede endliche Gerade eine lineare Gleichung hat. Jetzt können wir aber ganz geometrisch sagen: jeder Geraden von $\mathfrak{E}$ gehört im Bündel O ein ebenes Strah-

lenbüschel zu, und umgekehrt gleichfalls, abgesehen von dem ebenen Büschel $\tau = 0$; also nennt man auch den Inbegriff der von ihm in der Parallelebene $\mathfrak{E}$ definierten Punkte eine Gerade und hat damit eben „die unendlich ferne Gerade".

Ganz analoge Vorstellungen können wir uns nun bilden, wenn wir in einem dreidimensionalen Raume homogene Koordinaten einführen. Wir denken ihn uns als Ausschnitt $\tau = 1$ eines vierdimensionalen Hilfsraumes ξ, η, ζ, τ, und beziehen ihn auf das Strahlenbündel, das ihm aus dem Nullpunkt des Hilfsraumes projiziert. Diese Analogie in der Sprechweise kann man nun ohne Schwierigkeit ausbauen, und insbesondere auch auf die Deutung der unendlich fernen Ebene übertragen, natürlich ohne daß irgend eine mystische Deutung dabei ist.

4.) Führen wir nun in den Gleichungen (1) der projektiven Transformation für beide Räume R, R' homogene Koordinaten ein, so können wir sie, da allemal derselbe Nenner auftritt, unter Einführung eines willkürlichen Proportionalitätsfaktors ϱ' in die folgenden 4 Gleichungen zerspalten:

$$(2.)\qquad \begin{cases} \varrho'\xi' = a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta + d_1\tau \\ \varrho'\eta' = a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta + d_2\tau \\ \varrho'\zeta' = a_3\xi + b_3\eta + c_3\zeta + d_3\tau \\ \varrho'\tau' = a_4\xi + b_4\eta + c_4\zeta + d_4\tau\,; \end{cases}$$

das ist, abgesehen vom willkürlichen Faktor ϱ', die allgemeinste homogene lineare Substitution in 4 Variablen und stellt also eine affine Verwandtschaft der beiden vierdimensionalen Hilfsräume P_4, P'_4 dar, in denen wir nach dem Verfahren von Nr. 3 die homogenen Koordinaten konkret deuten. Deutlicher läßt sich das wieder vorstellen, wenn wir uns von Haus aus auf eine Ebene beschränken: Die allgemeinste projektive Transformation einer Ebene erhalten wir, indem wir den Raum des sie projizierenden Strahlenbündels bei festgehaltenem Anfangspunkt O einer sonst willkürlichen affinen Transformation unterwerfen und hinterher die Ebene mit dem transformierten Bündel schneiden; dabei erhalten wir allemal dieselbe Projektivität, wenn wir, dem Faktor ϱ' entsprechend, eine beliebige ähnlichkeitstransformation des Raumes von O aus hinzufügen; denn diese transformiert jeden Strahl durch O, auf deren Schnitte mit der Ebene es für die Projektivität allein ankommt, in sich.

Das Verfahren, das wir hier verwendet haben, indem wir die Hilfsräume P, P' benutzen, nennt man Prinzip des Projizierens und Schneidens; es erweist sich auch sonst vielfach als sehr nützlich, indem es – allgemein zu reden – kompliziertere Verhältnisse in

Räumen von n Dimensionen durch Hilfsbetrachtungen in Räumen von $n+1$ Dimensionen einfacher und verständlicher erscheinen läßt.

5.) Wir haben nun die Transformationsgleichungen (2) umzukehren; die Determinantentheorie lehrt, daß auch ξ, η, ζ, τ lineare homogene Kombinationen $\xi', \eta', \zeta', \tau'$ sind, natürlich wieder mit einem willkürlichen Proportionalitätsfaktor ρ:

$$(3)\qquad \begin{cases} \rho\,\xi = a_1'\xi' + b_1'\eta' + c_1'\zeta' + d_1'\tau' \\ \rho\,\eta = a_2'\xi' + b_2'\eta' + c_2'\zeta' + d_2'\tau' \\ \rho\,\zeta = a_3'\xi' + b_3'\eta' + c_3'\zeta' + d_3'\tau' \\ \rho\,\tau = a_4'\xi' + b_4'\eta' + c_4'\zeta' + d_4'\tau' \end{cases},$$

vorausgesetzt nur, daß die Determinante von (2) nicht verschwindet:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Die Wertsysteme ξ, η, ζ, τ und $\xi', \eta', \zeta', \tau'$ entsprechen einander dann also eineindeutig (bis auf jene gemeinsamen willkürlichen Faktoren).

Ich bemerke bald, wie Sie nach unseren Erfahrungen bei der Affinität sofort glauben werden, daß auch hier der Fall $\Delta = 0$ tatsächlich besonders interes-

sant ist und nicht übergangen werden darf; er stellt eine Abbildung des Raumes auf eine Ebene dar, wie wir sie bei jeder Zentralprojektion, z. B. bei der Photographie haben. Zunächst wollen wir jedoch den allgemeinen Fall $\Delta \neq 0$ erledigen.

6.) Aus (2) und (3) geht sofort hervor, daß jedesmal wenn zwischen ξ, η, ζ, τ eine lineare Gleichung besteht, eine solche auch zwischen $\xi', \eta', \zeta', \tau'$ besteht, und umgekehrt. Jeder Ebene entspricht also eine Ebene, insbesondere z. B. entspricht der unendlichfernen Ebene von R' eine bestimmte im allgemeinen endliche Ebene in R, d. i. die früher bereits genannte Flucht-Ebene. So erweist sich die Sprechweise von der unendlich fernen Ebene als äußerst zweckmäßig, da nur sie hier den Ausspruch solcher allgemeingiltigen Sätze gestattet. – Weiter folgt nun sofort, daß jeder Geraden notwendig eine Gerade entspricht. Nach der Möbiusschen Terminologie (I. 145) ist also jede projektive Transformation eine Kollineation.

7.) Nun ist aber das Schöne, daß dieser Satz umkehrbar ist: Jede Kollineation des Raumes, d. h. jede eineindeutige Transformation, die jeder Geraden eine Gerade zuordnet und die noch gewissen fast selbstverständlichen Bedingungen genügt, ist eine

Projektivität (d.h. eine analytisch durch die Gleichungen (1) bezw. (3) definierte Transformation).

Ich führe den von Möbius herrührenden Beweis dieses Satzes hier der Bequemlichkeit halber nur für die Ebene aus; für den Raum würde er ganz analog verlaufen. Der Gedankengang des Beweises ist der: Wir entnehmen einer beliebigen vorgelegten Kollineation 2 entsprechende Punktequadrupel, und werden nun unter α.) zeigen, daß es stets eine Projektivität gibt, die zwei solche Quadrupel ineinander überführt. Eine Projektivität ist aber gleichfalls eine Kollineation und wir werden ferner unter b.) beweisen, daß es stets nur eine Kollineation geben kann, in der sich dieselben Punktquadrupel entsprechen. Also muß die Projektivität mit der vorgelegten Kollineation tatsächlich identisch sein, und das enthält die Behauptung. Nun zur Einzelausführung der beiden Beweisteile!

α.) Wir bemerken, daß die Gleichungen der Projektivität in der Ebene

$$\varrho' \xi' = a_1 \xi + b_1 y + d_1 \tau$$
$$\varrho' y' = a_2 \xi + b_2 y + d_2 \tau$$
$$\varrho' \tau' = a_3 \xi + b_3 y + d_3 \tau$$

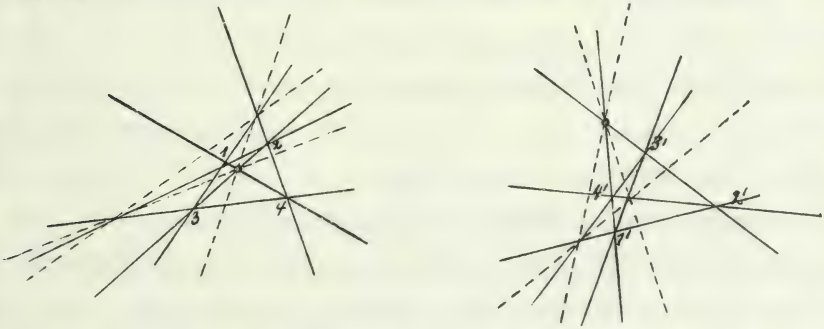
9 – 1 = 8 Konstante enthalten (da die Abänderung von ϱ' die Transformation nicht ändert). Daß zwei vor-

gegebene Punkte einander in einer Projektivität entsprechen, sind nun für diese 2 lineare Bedingungen, da es nur auf die Verhältnisse der 3 homogenen Koordinaten ankommt. Das Entsprechen zweier Punktequadrupel stellt also 2. 4 = 8 lineare Bedingungen dar, genauer gesagt, 8 lineare homogene Gleichungen für die 9 Größen $a_1 \dots a_3$. Daher kann man, wie bekannt, die Verhältnisse dieser Konstanten der Transformation stets den Bedingungen gemäß bestimmen, und hat damit eine Projektivität, die die gegebenen Quadrupel in einander überführt. Daß freilich eine eigentliche Projektivität von nichtverschwindender Determinante, und zwar eindeutig bestimmt wird, kann man – wie leicht zu sehen – nur erreichen, wenn jedes der beiden gegebenen Punktequadrupel „in allgemeiner Lage" sich befindet, d. h. wenn keine 3 der 4 Punkte in gerader Linie liegen; nur für diesen Fall brauchen wir hier den Satz.

b) Wir denken uns nun eine beliebige Kollineation der Ebenen E, E' gegeben. Sind dann 1, 2, 3, 4 irgend vier Punkte in E, von denen keine drei in gerader Linie liegen, und 1, 2, 3, 4, die entsprechenden Punkte in E', so ist die Behauptung, daß die Kollineation durch das Entsprechen dieser beiden Punktquadrupel völlig eindeutig festgelegt ist. Den Beweis führen

wir, indem wir zeigen, daß sich die Kollineation aus diesen beiden entsprechenden Quadrupeln allein unter Benutzung ihrer beiden charakteristischen Eigenschaften (Eindeutigkeit und gegenseitiges Entsprechen von Geraden) in eindeutig bestimmter Weise aufbauen läßt. Als Hauptbehelfsmittel verwenden wir die sog. Möbiusschen Netze, das sind Systeme von Geraden, die wir wie die Netze einer Spinne über die Ebene ausspannen.

Zunächst ziehen wir in jeder Ebene die 6 die 4 gegebenen Punkte paarweise verbindenden Geraden,



sie müssen einander entsprechen, denn z. B. der Geraden 1 2 muß in E' genau eine Gerade entsprechen, die sowohl den 1 entsprechenden Punkt 1' als auch den 2 entsprechenden 2' enthält, und das kann nur 1' 2' sein. Ebenso müssen aber nun auch notwendig die so neu entstehenden Schnitte entsprechender Geraden

sich entsprechen, z. B. der Punkt $(14, 23)$ und $(1'4', 2'3')$; auch das folgt sofort aus der Kollinearität und der Eindeutigkeit. Verbinden wir diese neuen Punkte mit einander wieder durch Geraden, schneiden diese miteinander, und setzen dieses Verfahren immer fort, so entsteht schließlich in jeder Ebene ein immer dichter werdendes Netz von Punkten und Geraden, und diese Punkte und Geraden müssen in der gesuchten Kollineation notwendig einander paarweise zugeordnet sein.

Hat man nun einen beliebigen vorgegebenen Punkt etwa in $\mathfrak{E}$, so wird er entweder selbst einmal ein Eckpunkt des Netzes oder man kann ihn, wie man leicht erkennen kann, in unbegrenzt enger werdende Maschen des Netzes einschließen, d. h. als Grenzpunkt von Netzecken darstellen. Im ersten Falle ist sofort der entsprechende Punkt in $\mathfrak{E}'$ als entsprechende Netzecke eindeutig bestimmt; um den zweiten zu erledigen, müssen wir aber noch einen Zusatz zur Definition der Kollineation machen, der Möbius noch so selbstverständlich erschien, daß er ihn nicht ausdrücklich auszusprechen für nötig hielt. Sie soll nämlich eine stetige Abbildung sein, d. h. jedem Grenzpunkt einer Punktmenge soll der Grenzpunkt der entsprechenden Punkt

menge korrespondieren. Daraus folgt dann auch im zweiten Falle nach der vorigen Bemerkung offenbar eindeutig der entsprechende Punkt in $\mathfrak{C}'$. Damit ist dann schließlich unsere Behauptung b) für eine stetige Kollineation als richtig erkannt. Übrigens würde man ebenso beweisen, daß eine stetige Kollineation im Raume durch 5, allgemein im n-dimensionalen Raume durch $n+2$ Paare entsprechender Punkte bestimmt ist.

Rufen wir uns nun die Überlegung vom Beginn dieser Nr. 7.) zurück (S. 183), so haben wir als Resultat folgendes präzise Theorem gewonnen: Die projektiven Transformationen sind die einzigen stetigen eindeutigen Transformationen, die ausnahmslos Gerade in Gerade überführen.

Nach dieser Abschweifung setzen wir die in Nr. 6 (S. 182) begonnene Untersuchung des Verhaltens der geometrischen Grundgebilde bei einer projektiven oder, wie wir jetzt in gleicher Bedeutung sagen können, kollinearen Transformation fort. Wir hatten da gesehen, daß eine unbegrenzte Ebene oder Gerade durch eine Projektivität in ein Gebilde der gleichen Art übergeführt wird, so daß diese Begriffe also den Projektivitäten gegenüber eine unveränderliche bestimmte Bedeutung ha-

ben.

In dieser Eigenschaft stimmen die allgemeinen Projektivitäten mit den affinen Transformationen überein, sie unterscheiden sich aber von diesen bereits durch ihr Verhalten gegenüber dem Begriffe des Parallelismus. Bei projektiven Transformationen bleibt nämlich der Parallelismus zweier Geraden nicht mehr notwendig erhalten, wie das bei affinen noch der Fall war (vgl. S. 146). Vielmehr kann ja die unendlich ferne Ebene des einen Raumes in irgend eine im Endlichen gelegene Ebene des andern, dessen Fluchtebene, übergehen, und dabei geht der den beiden Parallelen gemeinsame unendlichferne Punkt im allgemeinen in einen im Endlichen gelegenen Punkt der Fluchtebene über, in dem sich dann die den beiden Parallelen entsprechenden Geraden schneiden; man kann das etwa mit Hilfe der homogenen Koordinaten genau verfolgen. Freilich sehen wir dabei auch, daß der Begriff des Parallelismus nicht sinnlos zerstört wird, sondern daß er in einer ganz bestimmten allgemeineren Auffassung aufgeht: Die unendlich fernen Punkte des Raumes erfüllen eine Ebene, die projektiv in jede andere (endliche) Ebene des Raumes übergeführt werden kann, und daher mit

allen diesen Ebenen durchaus gleichberechtigt erscheint; sie ist nur gewissermaßen willkürlich durch das Prädikat „die unendlich ferne" ausgezeichnet. Parallel heißen dann Geraden (oder auch Ebenen), deren Schnitt auf dieser ausgezeichneten Ebene liegt; eine projektive Umformung kann bewirken, daß sie sich auf einer anderen festen Ebene treffen, und dann nennt man sie eben nicht mehr parallel.

Mit dieser Eigenschaft steht nun im Zusammenhange, daß auch die Grassmannschen Grundgebilde den Projektivitäten gegenüber keine invariante Bedeutung mehr haben, der freie Vektor wird keineswegs mehr in einen freien Vektor, der linienflüchtige nicht mehr in einen linienflüchtigen übergeführt, u. s. f. In der Tat, betrachten wir einen Linienteil des R mit den 6 Koordinaten:

$$X = x_1 - x_2,\ Y = y_1 - y_2,\ Z = z_1 - z_2,\ L = y_1 z_2 - y_2 z_1,\ M = x_2 z_1 - z_2 x_1,\ N = x_1 y_2 - y_1 x_2,$$

und bilden die analogen Größen $X' \ldots N'$ aus den Koordinaten der vermöge der projektiven Transformationen (1) (S. 175) entsprechenden Punkte $1', 2'$:

$$x_1' = \frac{a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1 + d_1}{a_4 x_1 + b_4 y_1 + c_4 z_1 + d_4} \text{ etc.}, \quad x_2' = \frac{a_1 x_2 + b_1 y_2 + c_1 z_2 + d_1}{a_4 x_2 + b_4 y_2 + c_4 z_2 + d_4} \text{ etc.}$$

Durch diese Formeln gehen $X' \ldots N'$ in Brüche über, deren Zähler zwar sich als lineare Kombinationen der 6 Größen $X \ldots N$ allein mit konstanten Koeffizienten

darstellen, während aber der allen gemeinsame Nenner

$(a_4 x_1 + b_4 y_1 + c_4 z_1 + d_4)(a_4 x_2 + b_4 y_2 + c_4 z_2 + d_4)$

die Punktkoordinaten selbst enthält und sich nicht durch $X \ldots V$ allein ausdrücken läßt. Die Koordinaten des transformierten Linienteils hängen also nicht nur von denen des ursprünglichen ab, sondern auch von der speziellen Lage seines Anfangs- und Endpunktes, und wenn wir die Strecke 1 2 längs ihrer Geraden verschieben, so daß sich $X \ldots V$ nicht ändern, so wird sich im allgemeinen $X' \ldots V'$ doch ändern, d. h. die Strecke 1' 2' ist kein Linienteil im Grassmannschen Sinne.

Daß demgegen die unbegrenzte Gerade bei projektiven Transformationen als solche erhalten bleibt, erklärt sich in diesem Zusammenhange so, daß sie durch die Verhältnisse der Größen $X : Y : \ldots : V$ dargestellt wird, aus denen sich der allen 6 Größen gemeinsame störende Nenner wieder forthebt; es drükken sich also diese Verhältnisse tatsächlich allein durch die Verhältnisse $x : y : \ldots : v$ aus.

Ich habe nun noch einige wichtige Gebilde zu nennen, die durch projektive Transformationen wieder in Gebilde derselben Art übergehen. Zunächst geht jede quadratische Gleichung in x', y', z', wie man

durch Multiplikation mit dem Quadrat des gemeinsamen Nenners $a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4$ sieht, aus einer quadratischen Gleichung in x, y, z hervor- und umgekehrt; das besagt, daß jede unbegrenzte Fläche zweiter Ordn. in einem Raume R in eine ebensolche in R' transformiert wird; daher wird auch der Schnitt einer solchen Fläche mit einer Ebene, d. h. eine Kurve zweiter Ordn. gleichfalls in eine Kurve zweiter Ordn. übergeführt. Ebenso wird überhaupt aus jedem unbegrenzten algebraischen Gebilde, das durch eine oder mehrere Gleichungen in den Koordinaten definiert ist, ein gleichartiges Gebilde derselben Ordn., so daß wir hier lauter gegenüber projektiven Umformungen invariante Begriffe haben.

Neben diesen durch Gleichungen definierten Gebilden, die durch alle projektiven Transformationen in gleichartige Gebilde übergehen muß ich noch eine zahlenmäßige Größe hervorheben, deren Wert bei allen diesen Transformationen ungeändert bleibt, und die so einen gewissen Ersatz des Begriffes der Entfernung und des Winkels bietet, denn deren Werte sind ja bekanntlich schon nicht einmal bei affinen Transformationen, geschweige denn bei projektiven invariant. Es handelt sich hier, um zuerst von der Geraden

zu reden, um eine gewisse Funktion der Entfernungen von 4 irgendwie gelegenen Punkten 1, 2, 3, 4, nämlich das schon früher erwähnte Doppelschnittverhältnis oder Doppelverhältnis [1] (vgl. S. 12):

$$\frac{\overline{12}}{\overline{14}} : \frac{\overline{32}}{\overline{34}} = \frac{\overline{12} \cdot \overline{34}}{\overline{14} \cdot \overline{32}} .$$

In der Tat kann man die Invarianz dieser Größe leicht rechnerisch bestätigen, wie wir übrigens später noch einmal von anderen Gesichtspunkten aus tun werden.

Ganz analog ist es bei den Strahlenbüscheln, nur müssen wir da nicht die Winkel selbst, sondern ihre Sinus verwenden, also, wenn 1, 2, 3, 4 Strahlen oder Ebenen eines Büschels sind:

$$\frac{\sin(1,2)}{\sin(1,4)} : \frac{\sin(3,2)}{\sin(3,4)} = \frac{\sin(1,2)\sin(3,4)}{\sin(1,4)\sin(3,2)} .$$

Da das die ersten zahlenmäßigen Invarianten projektiver Transformationen waren, die man kennen lernte, betrachteten es die projektiven Geometer sehr vielfach als erstrebenswertes Ziel, alle weiteren Invarianten der Projektivitäten auf Doppelverhältnisse zurückzuführen, wenn das auch manchmal nur sehr künstlich ging; wir werden später darauf eingehender zurückkommen.

Diese wenigen Andeutungen werden genügen, um

1) Der erste Namen stammt von Möbius, der zweite von Steiner.

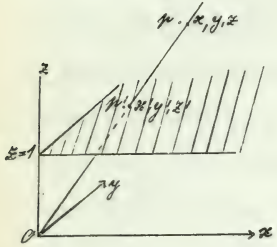
Ihnen zu zeigen, wie man das ganze Material der Geometrie nach ihrem Verhalten gegenüber den projektiven Transformationen streng scheiden kann. Alles, was bei diesen erhalten bleibt, das bildet den Gegenstand jener im letzten Jahrhundert entstandenen projektiven Geometrie, von der ich früher schon sprach, und auf die wir weiterhin noch tiefer einzugehen haben werden. Dieser Name, der jetzt allgemein üblich ist, ist besser als der früher viel gebrauchte „Geometrie der Lage"; so wollte man den Gegensatz zur „Geometrie des Maßes" oder „elementaren Geometrie" ausdrücken, die sämtliche, auch die durch projektive Umformungen vernichteten geometrischen Eigenschaften behandelt. Bei dieser Bezeichnung kommt aber gar nicht zum Ausdrucke, daß auch eine ganze Anzahl Maßeigenschaften, insbesondere die Doppelverhältnisse, projektiv invariant sind.

Ich möchte nun noch, genau wie früher bei den Affinitäten, über die Anwendungen der projektiven Transformationen sprechen. Ich beginne hier mit Ausführungen zur

1.) darstellenden Geometrie und kann da natürlich lediglich unter Verzicht auf jede Systematik einige charakteristische Beispiele hervorheben. Das erste

sei

a.) die Abbildung des Raumes durch Zentralperspektive auf eine Ebene, die die direkte Verallgemeinerung der Axonometrie (Parallelperspektive) ist; hier gehen die Projektionsstrahlen von einem beliebigen endlichen statt von einem unendlich fernen Punkte aus.



Wir wollen das Projektionszentrum speziell in den Koordinatenanfang O legen und die Bildebene zur Ebene $z = 1$ machen. Dann ist für den Bildpunkt $p'(x'/y'/z')$ jedes Punktes $p(x/y/z)$ jedenfalls

$$z' = 1,$$

und ferner ist, da p, p' auf demselben Strahl durch O liegen:

$$x' : y' : z' = x : y : z.$$

Daher lauten die Gleichungen unserer Abbildung

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{z} \\ y' = \frac{y}{z} \\ z' = \frac{z}{z} \end{cases}.$$

Das ist also eine spezielle projektive Transformation, und die Analogie zu den Verhältnissen bei der Axonometrie läßt bereits vermuten, daß sie eine verschwindende Determinante besitzen wird. In der Tat, gehen wir zu homogenen Koordinaten über, so wird

$$\begin{cases} \rho' \xi' = \xi \\ \rho' \eta' = \eta \\ \rho' \zeta' = \zeta \\ \rho' \tau' = \xi \end{cases},$$

und die Determinante ist:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die einzelnen Eigenschaften dieser Transformation werden Sie sich nach Analogie unserer früheren Betrachtungen leicht ableiten können, wenn Sie nur bemerken, daß jede Ebene auf die Bildebene im allgemeinen durch eine projektive (zweidimensionale) Transformation von nichtverschwindender Determinante bezogen ist. Daraus folgt insbesondere z. B., daß das Doppelverhältnis von je 4 entsprechenden Punkten einer Geraden oder je 4 Strahlen durch einen Punkt bei der Transformation ungeändert bleibt.

b.) Das zweite Beispiel betrifft eine die Zentralperspektive als Grenzfall einschließende Projektivität von nichtverschwindender Determinante, die sog. Reliefperspektive. Ein Relief eines Gegenstandes soll so gearbeitet sein, daß es nach dem an einem be-

stimmten Punkte aufgestellten Auge des Beschauers dieselben Strahlen sendet, wie sie das Original nach dem entsprechend aufgestellten Beobachter senden würde. Für ein geeignet orientiertes Koordinatensystem besagt das wieder, daß Originalpunkt und Bildpunkt je auf demselben Strahle durch den Anfangspunkt liegen:

$$(1) \qquad x' : y' : z' = x : y : z.$$

Der Unterschied gegen den vorigen Fall ist aber, daß der betrachtete Raum nicht in eine Ebene abgebildet wird, sondern bloß auf ein gewisses schmales Raumstück endlicher Breite kollineiert wird.

Ich behaupte sogleich, daß das durch die folgenden Formeln:

$$(2) \qquad x' = \frac{(1+k)x}{z+k}, \quad y' = \frac{(1+k)y}{z+k}, \quad z' = \frac{(1+k)z}{z+k}$$

geleistet wird, die zunächst (1) tatsächlich unmittelbar genügen, und jedenfalls eine Kollineation darstellen. Wir bilden ihre Determinante aus den zugehörigen homogenen Gleichungen

$$\begin{cases} \rho' \xi' = (1+k)\xi \\ \rho' y' = (1+k)\eta \\ \rho' \zeta' = (1+k)\zeta \\ \rho' \tau' = \xi + k\cdot\tau ; \end{cases}$$

sie lautet

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{vmatrix} = k(1+k)^3$$

und ist also von Null verschieden, außer wenn $k = 0$ oder $k = -1$ ist.

Für $k = 0$ geht (2) genau in die obigen Formeln der Zentralperspektive über, d. h. das Relief artet vollständig zur Ebene aus; $k = -1$ ergibt aber $x' = y' = z' = 0$, d. h. jeder Raumpunkt wird in den Nullpunkt abgebildet – eine offenbar gänzlich unbrauchbare triviale Ausartung.

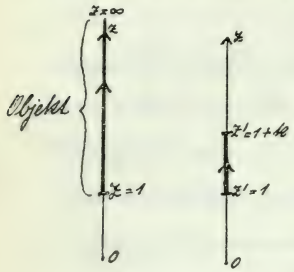
Wir nehmen der Bestimmtheit halber $\underline{k > 0}$ an. Um die Abbildung (2) nun geometrisch klar zu machen, bemerken wir zunächst, daß jede Ebene $z = \text{Const.}$ in eine Parallelebene mit dem Koordinatenwert

$$(3) \qquad z' = \frac{(1+k)z}{z+k}$$

übergeht; die durch Projektionsstrahlen aus O erfolgende Abbildung beider Ebenen aufeinander ist durchaus anschaulich und nur das Gesetz (3) selbst bleibt noch zu verdeutlichen.

Für $z = \infty$ (bezw. $v = 0$) wird $z' = 1 + k$; $\underline{\text{die}}$ $\underline{\text{Parallelebene zur } x\text{-}y\text{-Ebene in diesem Abstande ist}}$ $\underline{\text{also die Fluchtebene des Bildraumes und bildet ge-}}$

wissermaßen den Hintergrund des Reliefs, auf dem der unendlichferne Hintergrund des Objektraumes abgebildet erscheint. Eine wichtige Rolle spielt noch die Ebene $z = 1$, in der Objekt und Bild zusammenfallen; denn tatsächlich wird für $z = 1$ auch $z' = 1$; läuft nun z von 1 positiv hin bis zu ∞, so wächst z monoton von 1 bis $1 + k$, d. h. beschränken wir uns auf Objekte hinter der Ebene $z = 1$, so erhalten wir tatsächlich ein Relief von endlicher Tiefe k als Bild; eine solche Beschränkung wird in der Praxis stets stattfinden können und müssen.



Was sonst die Zuordnung (3) angeht, so gilt für das Doppelverhältnis der Punkte $z, 1, z', 0$:

$$(z, 1, z', 0) = \frac{z-1}{z-0} \cdot \frac{z'-0}{z'-1} = \frac{z-1}{z} \cdot \frac{(1+k)z}{k(z-1)} = \frac{1+k}{k}.$$

Allgemein gehören also zwei solche Werte z, z' zusammen, die mit den Punkten 1 und 0 ein Doppelverhältnis von festem Betrage bilden.

Ich kann Ihnen hier noch ein Modell vorführen, das eine Kugel auf einem Würfel, einen Rotationskegel, und einen Rotationszylinder im Reliefperspektive darstellt; aus der richtigen Entfernung betrachtet, vermittelt es in der Tat einen sehr deut-

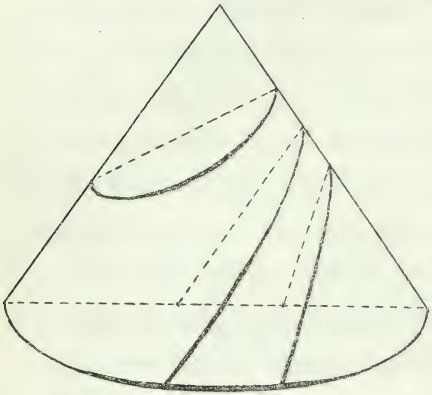
lichen Eindruck der Originalkörper. Hierbei spielen natürlich psychologische Momente sehr stark mit, denn die Tatsache, daß die gleichen Lichtstrahlen ins Auge treten, vermag allein den körperlichen Eindruck nicht zu bestimmen; sehr maßgebend ist dabei jedenfalls die Gewöhnung, denn da wir weit öfter eine Kugel auf einen Würfel, als ein schmales Ellipsoid auf einem schmalen Hexaeder gesehen haben (das ist die Gestalt des reliefperspektivischen Bildes), so sind wir von vornherein geneigt, den Lichteindruck auf die erstere Ursache zurückzuführen. Die nähere Zergliederung der hierbei in Betracht kommenden Momente möge indessen dem Psychologen überlassen bleiben.

Das mag genügen, um Ihnen einen ersten Einblick in die Verwendung der projektiven Transformationen in der darstellenden Geometrie zu geben. Natürlich bedürfen diese Ansätze dringend der Vertiefung und ich möchte dies Gebiet nicht verlassen, ohne Sie zu einem eingehenden Studium der darstellenden Geometrie aufzufordern, die, wie mir scheint, für jeden Lehrer der Mathematik unentbehrlich ist.

2.) Die zweite Anwendung der projektiven Transformationen, von der ich nun noch reden will, betrifft die Herleitung geometrischer Sätze und Auffas-

sungen; analog hatten wir ja früher (S. 153) die affinen Transformationen verwendet.

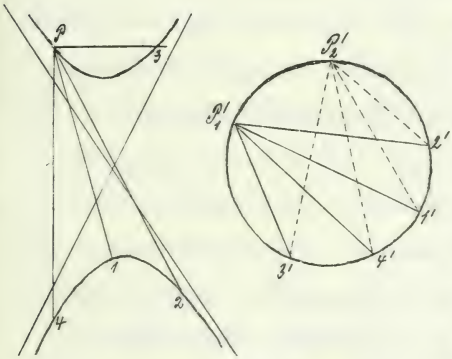
a.) Wir gehen davon aus, daß ein Kreis, wenn wir ihn projektiven Umformungen bezw. Zentralperspektiven unterwerfen, in einen beliebigen „Kegelschnitt" übergeht, d. h. in den Schnitt des Kegels der nach ihm hinlaufenden Projektionsstrahlen mit einer beliebigen Ebene; ich habe hier ein Modell, das in dieser Weise die Entstehung von Ellipse, Hyperbel, Parabel zeigt.



b.) Für die projektive Geometrie gibt es also nur einen einzigen Kegelschnitt, denn je zwei lassen sich in den Kreis und daher auch ineinander projektiv überführen. Die Einteilung in Ellipse, Parabel, Hyperbel bezeichnet von diesem Standpunkt aus keinen absoluten inneren Unterschied, sondern betrifft nur die zufällige Lage gegen die eine Gerade, die man als „unendlichfern" für gewöhnlich auszeichnet.

c.) Nun soll der folgende Fundamentalsatz vom Doppelverhältnis bei Kegelschnitten abgeleitet werden:

Irgend 4 feste Punkte eines Kegelschnittes 1, 2, 3, 4 werden von einem fünften beweglichen Punkte P desselben durch 4 Strahlen projiziert, die ein festes, von der speziellen Lage von P unabhängiges Doppelverhältnis haben.



Zum Beweise gehen wir auf den Kreis zurück, aus dem der betrachtete Kegelschnitt durch Zentralperspektive entsteht; da dabei die Doppelverhältnisse ungeändert bleiben, ist unser Satz allgemein jedenfalls richtig, wenn nur beim Kreise die 4 entsprechenden Punkte 1', 2', 3', 4' aus beliebigen fünften Punkten P_1', P_2' durch Strahlen desselben konstanten Doppelverhältnisses projiziert werden. Das ist aber unmittelbar klar, denn nach dem Satze vom Peripheriewinkel sind die Winkel zwischen den Strahlen P_1' (1', 2', 3', 4') einerseits und P_2' (1', 2', 3', 4') andererseits paarweise gleich, und also sind es gewiß auch ihre Doppelverhältnisse.

e.) Entsprechend diesem Satz hat nun Steiner überhaupt die Kegelschnitte definiert, indem er von zwei projektiv aufeinander bezogenen Büscheln ausging, in denen je 4 entsprechende Strahlen gleiches Dop-

polverhältnis haben; der Kegelschnitt ist dann der geometrische Ort der Schnitte korrespondierender Strahlen aus diesen projektiven Strahlenbüscheln.

Diese wenigen Andeutungen mögen hier genügen, um Ihnen die große Bedeutung der projektiven Transformationen für die Theorie der Kegelschnitte verständlich zu machen. Näheres darüber können Sie in jedem Lehrbuche der projektiven Geometrie finden.

Wir gehen jetzt lieber sogleich in dem großen Gedankengange dieses Hauptteiles weiter zu neuen Klassen geometrischer Transformationen. Wir wollen uns nun nicht mehr auf lineare Transformationen beschränken, die wir bisher in einer von den Bewegungen bis zu den allgemeinsten Projektivitäten aufsteigenden Reihenfolge betrachtet haben; wir gehen daher jetzt über zu

III. Höheren Punkttransformationen,

höher insofern, als sie nicht mehr durch lineare sondern durch höhere rationale, algebraische oder auch transzendente Funktionen dargestellt werden:

$$x' = \varphi(x, y, z), \quad y' = \chi(x, y, z), \quad z' = \psi(x, y, z).$$

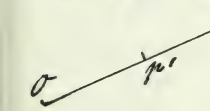
Gemäß der Tendenz dieser Vorlesung will ich hier keine allgemeine Systematik geben, sondern nur eine Reihe solcher Transformationen als Beispiele hervorheben, die eine

allgemeine Bedeutung in der reinen Mathematik sowie insbesondere auch in den Anwendungen haben.

Am meisten gebraucht wird da wohl

1. die Transformation durch reziproke Radien,

und von ihr muß ich hier zunächst reden. Bei ihr wird behandlich jedem Punkte p derjenige Punkt p' auf seiner Verbindungsgeraden O p mit dem Koordinatenanfang O zugeordnet, für den das Produkt $\overline{Op} \cdot \overline{Op'}$ gleich einer gegebenen Konstanten ist; diese Gleichung gibt der Transformation auch ihren Namen.



Sie wissen, daß diese Transformationen in der reinen Mathematik, vorzugsweise in der Komplexen Punkttransformationstheorie eine große Rolle spielen. Nicht minder häufig kommen sie aber in der Physik und anderen Anwendungen — von einer Anwendung werden wir noch ganz besonders sprechen — vor.

Bei der Behandlung unserer Transformation gehe ich wiederum

1.) von der Aufstellung ihrer Gleichungen in rechtwinkligen Koordinaten aus: Da p und p' auf derselben Geraden durch O liegen, muß sein

$$(1) \qquad x' : y' : z' = x : y : z ,$$

und die Relation für die Entfernungen Op, Op' er-

gibt, wenn wir die Konstante der Einfachheit halber 1 setzen:

$$(2) \qquad (x^2+y^2+z^2)/(x'^2+y'^2+z'^2) = 1 .$$

Demnach lauten die Gleichungen der Transformation:

$$(3.) \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{x}{x^2+y^2+z^2} \\ y' = \dfrac{y}{x^2+y^2+z^2} \\ z' = \dfrac{z}{x^2+y^2+z^2} \end{cases},$$

und genau so ergibt sich, daß auch umgekehrt

$$(4.) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{x'}{x'^2+y'^2+z'^2} \\ y = \dfrac{y'}{x'^2+y'^2+z'^2} \\ z = \dfrac{z'}{x'^2+y'^2+z'^2} \end{cases}.$$

Sowohl die Koordinaten von p' stellen sich also als rationale Funktionen von p dar, als auch umgekehrt die Koordinaten von p durch die von p' (und zwar sind es beidemal dieselben Funktionen). Der Nenner ist ein quadratischer Ausdruck, so daß hier ein spezieller Fall einer sog. quadratischen birationalen Transformation vorliegt. Übrigens gibt es eine ausgedehnte Klasse solcher birationaler (im allgemeinen eineindeutiger) Transformationen, die in beiden Richtungen sich durch rationale Funktionen darstellen; sie sind unter dem Namen Cremonatransformationen Gegenstand einer weit ausgebildeten Theorie geworden, auf die ich hier bei der Behandlung ihres einfachsten Repräsentanten wenigstens

hinweisen will.

2.) Die Gleichungen (4) zeigen, dass unsere Transformation im allgemeinen eindeutig umkehrbar ist. Nur ein Fall muss noch näher erörtert werden: Wird $x = y = z = 0$, so verschwindet der Nenner in (1) von höherer Ordnung als die Zähler, und daher werden x' y' z' unendlich; wir könnten den Nullpunkt also einen Flusspunkt der Transformation nennen. Gehen umgekehrt x', y', z' irgendwie ins Unendliche, so folgt aus (2) stets $x = y = z = 0$, so dass, wollten wir uns der früher eingeführten Terminologie bedienen, wir sagen müssten, dass ein einziger Punkt der ganzen unendlich fernen Ebene entspricht. Aber diese „unendlich ferne Ebene" war nur eine bequeme Ausdrucksweise, die den projektiven Transformationen angepasst war; sie deutete an, dass sich bei diesen Transformationen das Unendlichweite verhält wie eine Ebene, d. h. in die Punkte irgend einer endlichen Ebene übergeführt wird, und ermöglichte es, Ausnahmen von den allgemeinen Sätzen und Fallunterscheidungen durchaus zu vermeiden. Es liegt kein Grund vor, der uns hindert, hier eine davon verschiedene Ausdrucksweise einzuführen und durch sie für unseren jetzigen Zweck zu ebenso ausnahmslosen Sätzen zu gelangen: Das Un-

endlichweite wird durch unsere Transformation in einen Punkt übergeführt; also sagen wir einfach, es gibt nur einen unendlichfernen Punkt, und der entspricht bei unserer Transformation eben dem Koordinatenanfangspunkt: Dann ist unsere Transformation tatsächlich ausnahmslos eineindeutig.

Man kann nicht genug betonen, daß an metaphysische Vorstellungen über die wahre Natur des Unendlichfernen hier ebenso wie früher nicht im entferntesten gedacht werden soll; es gibt allerdings immer wieder Menschen, die an die eine oder andere Redeweise vorzugsweise gewöhnt, ihr einen transzendentalen Sinn unterlegen möchten, und solche Vertreter der beiden Auffassungen geraten gar auch wohl manchmal miteinander in Streit. Tatsächlich haben sie beide Unrecht: sie vergessen, daß es sich nur um willkürliche, nur für den einen oder andern Zweck geeignete Festsetzungen handelt.

3.) Die hauptsächliche Eigenschaft unserer Transformation ist, daß sie – allgemein zu reden – Kugeln in Kugeln überführt. Die Gleichung jeder Kugel hat nämlich die Form

$$A(x^2+y^2+z^2)+Bx+Cy+Dz+G=0, \tag{5}$$

indem wir hierin x, y, z aus den Transformationsglei-

chungen (3) und den quadratischen Term bald aus der Relation (2) (S. 204) ersetzen, folgt nach Multiplikation mit $x'^2 + y'^2 + z'^2$

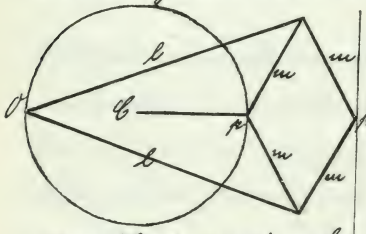
$$A + Bx + Cy + Dz + E(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

also tatsächlich wieder eine Kugelgleichung. Dabei ist freilich zu bemerken, daß in (5) für $A = 0$ auch die Ebenen mit einbegriffen sind, und wir werden sie zweckmäßiger Weise hier als spezielle Kugeln aussprechen, und zwar als solche, die durch den unendlichfernen Punkt gehen. Sie verwandeln sich durch die Transformation in Kugeln durch den dem unendlichfernen Punkt entsprechenden Nullpunkt; ebenso gehen umgekehrt solche Kugeln in Kugeln durch den unendlichfernen Punkt, d. i. Ebenen über. Mit diesen Festsetzungen gilt wieder unser Theorem, daß Kugeln Kugeln entsprechen, ausnahmslos.

Da sich 2 Kugeln (und ebenso Kugel und Ebene) in einem Kreise schneiden, so gilt auch weiterhin, daß jedem Kreis ein Kreis entspricht; dabei sind als „Kreise durch den unendlichfernen Punkt" (denen Kreise durch den Nullpunkt entsprechen) speziell auch gerade Linien mit einbegriffen.

5.) Dieser letzte Satz bleibt natürlich auch bestehen, wenn man die Transformation durch reziproke Radien

nur innerhalb einer Ebene vorkommt, und er liefert da eine elegante Lösung des Problemes der Geradführung, das ja äußerst elementar ist und eigentlich dem Interessengebiete auch des Nichtmathematikers angehört. Die Aufgabe ist die, durch gelenkig verbundene starre Stangen einen Punkt auf einer Geraden zu führen; früher legte man bei der Konstruktion von Dampfmaschinen besonderes Gewicht auf solche Mechanismen, die zwischen der hin- und hergehenden Bewegung des Kolbens und der oszillierenden des Balanciers vermitteln sollten. – Hier interessiert uns nun der Inversor, den Peaucellier, ein französischer Offizier, 1864 konstruierte, und der damals großes Aufsehen erregte, obwohl seine Konstruktion sehr einfach und ziemlich naheliegend ist. Es sind da zunächst 6 Stangen



durch Gelenke verbunden: Zwei von der Länge l sind an einem festen Punkte O angebracht, während die anderen 4 die gleiche Länge m haben und einen mit 2 gegenüberliegenden Ecken an den Enden der Stangen l befestigten Rhombus bilden. Die anderen beiden Ecken dieses Rhombus mögen p und p' heißen. Dieser Apparat hat 2 Freiheitsgrade: Einmal kann

man die beiden Stangen l beliebig gegeneinander neigen, und sie dann gemeinsam beliebig um O drehen. Bei jeder solchen Bewegung bleibt aber stets, wie eine ganz einfache geometrische Betrachtung lehrt, $O\,p\,p'$ eine Gerade, und es ist ferner

$$\underline{O\,p \cdot O\,p' = l^2 - m^2 = \text{Konst.}}$$

unabhängig von der jeweiligen Lage von p; der Apparat vermittelt also tatsächlich eine Transformation durch reziproke Radien mit O als Zentrum. Nun braucht man nur p auf einem Kreise durch O laufen zu lassen, um – nach dem Satze von Nr. 4 – p' wirklich zu einer Bewegung auf einer Geraden zu zwingen; das erreicht man aber sofort, wenn man an p noch einen siebenten Arm $p\,C$ anbringt, dessen anderer Endpunkt C in der Mitte zwischen O und der Anfangslage von p befestigt sind; dann bleibt nur noch ein Freiheitsgrad übrig und p' wird in der Tat auf einer Geraden geführt. Übrigens muß man bemerken, daß p' nicht etwa die ganze unbegrenzte Gerade durchlaufen kann; vielmehr ist es auf ein solches Stück von ihr beschränkt, daß seine Entfernung von O immer kleiner als $l + m$ bleibt, da die gegebenen Stangenlängen eine weitere Bewegung nicht gestatten. – Bei dem Modell, das ich Ihnen hier zeige, kann man übrigens auch C ein wenig verschieben; dann

gelat der Kreis, den p durchläuft, dicht an O vorbei und daher beschreibt p' keine Gerade mehr, sondern einen Kreis von sehr großem Radius; auch in dieser Anwendung kann der Apparat gelegentlich nützlich sein.

6) Von allgemeinen Eigenschaften der Transformation durch reziproke Radien habe ich endlich noch die Winkeltreue hervorzuheben d. h. irgend 2 Flächen und insbesondere 2 Kugeln schneiden sich vor und nach der Transformation unter den gleichen Winkeln. Auf den Beweis gehe ich nicht ein, da ich hier ja nur einen Ueberblick geben will und es mir auf die Durchführung von Einzelheiten nicht ankommt.

Ein spezieller Ausschnitt der Transformation durch reziproke Radien ist die stereographische Projektion, die gerade auch in den Anwendungen die größte Rolle spielt. Dann erhält sie so:

Wir wollen die Kugel betrachten, die durch unsere Transformation (3) in die feste Ebene $x' = 1$ übergeführt wird. Nach der dritten Gleichung (3) ist ihre Gleichung

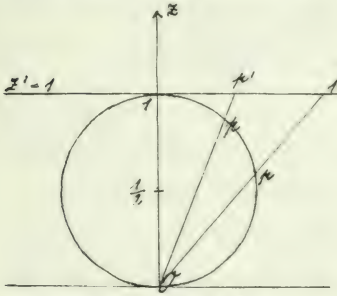
$$1 = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2},$$

was wir auch schreiben können:

$$x^2 + y^2 + (z - \tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{4},$$

d. h. es ist eine Kugel mit dem Radius $\frac{1}{2}$ um den Punkt

$\xi = \frac{1}{2}$ der ξ – Achse, die tatsächlich durch den Kullpunkt geht; sie berührt übrigens unsere Bildebene $\xi' = 1$. Die Einzelheiten der Beziehung zwischen Ebene und Kugel können wir uns nun durch die Projektionsstrahlen durch O unmittelbar vor Augen führen; ich hebe hier nur tabellarisch ohne Beweis folgendes hervor:



1.) Die Abbildung ist ausnahmslos eineindeutig, wenn wir das Unendlichweite der Ebene als einen Punkt auffassen, der dann auf den Kugelpunkt O abgebildet wird.

2.) Kreisen der Kugel entsprechen Kreise der Ebene, speziell Kreisen durch O entsprechen Kreise durch den unendlichfernen Punkt, das sind Gerade.

3.) Die Beziehung beider Flächen ist winkeltreu oder – wie man auch sagt – konform.

Daß diese stereographische Projektion in der Funktionentheorie die größte Bedeutung hat, dürfte Ihnen allen bekannt sein; haben wir sie doch schon in der vorigen Vorlesung [1] äußerst oft mit Vorteil angewandt. Von den Anwendungen, in denen sie eine nicht minder wichtige Rolle spielt, möchte ich hier besonders die Geographie und

1) siehe Teil I, pag. 238 ff.

Astronomie hervorheben; schon den alten Astronomen war sie bekannt und noch heute finden Sie in jedem Atlas Projektionen der Halbkugeln und der Polgegenden in stereographischer Projektion.

Ich will im Anschluss hieran als weitere Beispiele höherer Punkttransformationen überhaupt geraderen

2. Einige allgemeinere Kartenprojektionen

behandeln, was ich gerade in dieser Vorlesung für äußerst angebracht halte; die Theorie der geographischen Karten ist nämlich ein Gebiet, das im Rahmen des Schulunterrichts von größter Bedeutung ist; jedem Knaben wird es interessant sein, zu hören, wie denn eigentlich die Karten in seinem Atlas gezeichnet sind, und der Mathematiklehrer wird gewiss größere Teilnahme für seinen Unterricht erzielen können, wenn er hierüber gelegentlich den erwünschten Aufschluss gibt, als wenn er ausschließlich abstrakte Fragen behandelt. So sollte gewiss jeder Lehramtskandidat Bescheid über jenes Gebiet wissen, das überdies auch dem Mathematiker interessante Beispiele von Punkttransformationen liefert.

Es wird am zweckmäßigsten sein, wenn wir uns von vornherein die Erdkugel stereographisch auf die $x-y$-Ebene abgebildet denken; dann ist jede andere Abbildung auf eine $\xi-\eta$-Ebene gegeben durch

2 Gleichungen

$$\xi = \varphi(x, y) \quad , \quad \eta = \chi(x, y) .$$

Eine erste in der Praxis oft gebrauchte Art von Abbildungen sind die winkeltreuen; man erhält sie, wie die Funktionentheorie lehrt, wenn man die komplexe Variable $\xi \pm i\eta$ als analytische Funktion der komplexen Variablen $x + iy$ auffasst:

$$\xi \pm i\eta = f(x+iy) = \varphi(x, y) + i\chi(x, y).$$

Ich möchte aber hier ausdrücklich betonen, daß in der geographischen Praxis gerade auch sehr vielfach nicht winkeltreue Abbildungen verwendet werden, so daß man keineswegs, wie es manchmal geschieht, diese als das allein Wichtige ansehen darf.

Unter den konformen Abbildungen kommt ganz besonders eine in Betracht, die sog. Merkatorprojektion, die der berühmte Mathematiker Gerhard Merkator, der eigentlich den guten deutschen Namen Kremer führte, ums Jahr 1550 entdeckt hat. Merkatorkarten der Erde finden Sie bekanntlich ebenfalls in jedem Atlas.

Diese Merkatorprojektion ist dadurch definiert, daß unsere analytische Funktion f speziell der Logarithmus ist, also durch die Gleichung:

$$\xi + i\eta = \log(x + iy) .$$

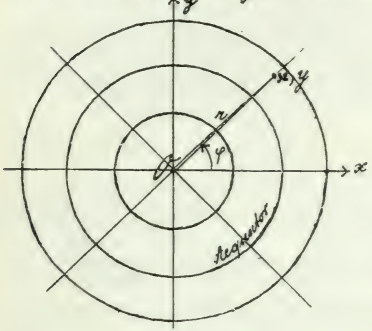
Wir können hier als Mathematiker die Eigenschaften die-

ser Projektion aus der kurzen so geschriebenen Formel sofort ableiten, während das für den nicht mathematisch gebildeten Geographen natürlich viel schwerer ist. Führen wir in der $x-y$-Ebene Polarkoordinaten ein, d. h. setzen wir $x + i\,y = r \cdot e^{i\varphi}$, so wird

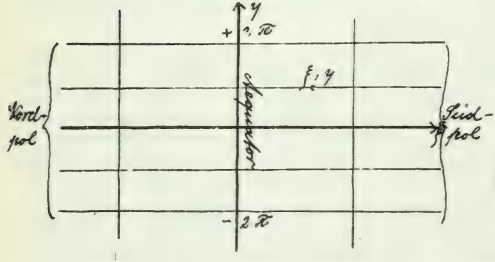
$$\xi + i\,\eta = \log\left(r \cdot e^{i\varphi}\right) = \log r + i\,\varphi,$$

also

$$\underline{\xi = \log r \,, \quad \eta = \varphi.}$$



Wir nehmen an, daß der Südpol der Erde das Zentrum der vorgenommenen stereographischen Projektion ist; dann entspricht der Nullpunkt 0 der $x-y$-Ebene dem Nordpol und die Strahlen $\varphi = \text{konst.}$ durch ihn entsprechen den Erdmeridianen. Daher werden diese in der Abbildungsprojektion zu Parallelen $\eta = \text{konst.}$ zur ξ-Achse; der Nordpol ($\xi = -\infty$) liegt auf ihnen links, der Südpol ($\xi = +\infty$) rechts im Unendlichweiten. Da der Winkel φ bis auf Vielfache von 2π unbestimmt ist, ist die Abbildung unendlichvieldeutig, und jeder Parallelstreifen von der Breite 2π parallel zur ξ-Achse stellt bereits ein Bild der ganzen



Erdoberfläche dar. Die Breitenkreise, denen in der stereographischen Projektion die Kreise r = Konst entsprechen, werden hier zu den Parallelen ξ = Konst, also, wie das ja auch der Winkeltreue halber selbstverständlich ist, zu senkrechten Trajektorien der Bildgeraden der Äquatorialmeridiane; speziell dem Äquator ($r = 1$) entspricht die y-Achse ($\xi = 0$).

Dies eine Beispiel mag hier genügen, um Sie zu weiterer Beschäftigung mit den zahlreichen Transformationen der geographischen Kartenlehre anzuregen; ich will hier lieber noch auf einen allgemeineren Satz dieser Theorie eingehen. Wer sich von Ihnen mit Geographie beschäftigt hat, hat dort gewiß von den Tissotschen Sätzen gehört, die Tissot in seinem von Hammer in Stuttgart übersetzten Lehrbuch [1] entwickelt hat. Wir werden von unserem Standpunkte aus nun ihren Inhalt sehr einfach klar machen können.

Es mögen 2 geographische Karten, Abbildungen der Erdkugel auf eine x-y- und eine ξ-η-Ebene, vorliegen, die beide ganz beliebig, insbesondere auch nicht konform sein können. Diese beiden Abbildungen stehen dann jedenfalls in einer Beziehung

$$\xi = \varphi(x, y) \quad , \quad \eta = \chi(x, y) .$$

---

1) Die Netzentwürfe geographischer Karten nebst Aufgaben über Abbildung beliebiger Flächen aufeinander. Stuttgart 1887.

Wir wollen nun nur die Umgebung zweier korrespondierender Stellen $x_0 | y_0$ und $\xi_0 | \eta_0$ untersuchen, wo also

$$\xi_0 = \varphi(x_0, y_0) \quad , \quad \eta_0 = \chi(x_0, y_0).$$

Dazu führen wir neue Variable x', y', ξ', η' durch die Gleichungen

$$x = x_0 + x' \quad , \quad y = y_0 + y' \; ;$$
$$\xi = \xi_0 + \xi' \quad , \quad y = y_0 + y'$$

ein, und haben dann als Entwicklungen von φ, χ nach dem Taylorschen Satze:

$$\xi' = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 \cdot x' + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_0 \cdot y' + \dots$$
$$\eta' = \left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)_0 \cdot x' + \left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)_0 \cdot y' + \dots \; ,$$

wo die Ableitungen an der Stelle $x = x_0$, $y = y_0$ genommen sind, und durch die Punkte Glieder höherer Ordnung in x', y' angedeutet worden. Wir beschränken nun nun auf eine so kleine Umgebung unserer Stelle x_0, y_0, daß die angeschriebenen linearen Glieder bereits eine hinreichende Annäherung an die wirklichen Werte von ξ', η' geben; dabei schließen wir natürlich solche singulären Stellen $x_0 | y_0$ aus, bei denen eine derartige Umgebung nicht existiert, also z. B. solche, an denen alle 4 ersten partiellen Ableitungen gleichzeitig verschwinden, so daß die linearen Glieder gar keine brauchbare Annäherung liefern. Setzen wir uns nun die so entstehenden linearen Gleichungen zwischen x', y', ξ', η' an, so haben wir

unmittelbar den fundamentalen Satz, der die Grundlage der Tissotschen Betrachtungen bildet: Zwei geographische Abbildungen desselben Terrains hängen in der Umgebung einer beliebigen nicht gerade singulären Stelle angenähert durch eine affine Transformation zusammen. Wendet man nun unsere früheren Theoreme über die affinen Transformationen an, so erhält man tatsächlich alle Tissotschen Sätze.

Ich will nur an wenige Hauptpunkte erinnern. Wir wissen, daß es vor allem auf die Determinante der affinen Transformationen, hier also auf

$$\Delta = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)_0 \end{vmatrix}$$

ankommt, die man bekanntlich als Funktionaldeterminante der Funktionen φ, χ an der Stelle $x = x_0\ y = y_0$ bezeichnet. Den Fall $\Delta = 0$ wird man bei diesen Anwendungen stets vermeiden; denn dann wird das kleine Flächenstück der x-y-Ebene abgebildet auf ein Kurvenstück der ξ-η-Ebene, und das wird der Geograph kaum als brauchbare Karte ansehen. Wir haben hier also stets $\Delta \neq 0$ anzunehmen. Das Zustandekommen einer solchen affinen Transformation hatten wir uns aber früher (S. 151) ausführlich veranschaulicht, und wir können daher jetzt sofort den Satz übernehmen: Man erhält die Um-

gebung des Punktes $E_0 | y_0$ aus der des Punktes $x_0 | y_0$ mit der hier in Betracht kommenden Genauigkeit, indem man sie nach 2 zueinander senkrechten Richtungen reinen Deformationen unterwirft, und sie dann noch um einen passenden Winkel dreht. Sie werden bei Tissot finden, daß er tatsächlich diesen Satz sich ad hoc in anschaulicher Weise ableitet, und Sie haben hier ein interessantes Beispiel dafür, wie die Vertreter der Anwendungen von sich aus den mathematischen Anforderungen ihrer Disziplinen genügen; dem Mathematiker erscheint die Sache natürlich dann immer sehr einfach, aber es ist doch lehrreich für ihn, zu wissen, was jenen Anwendungen not tut.

Die letzte Klasse von höheren Punkttransformationen, die ich nun noch erörtern will, sind

3. die allgemeinsten eineindeutigen stetigen Punkttransformationen.

Alle bisher zur Verwendung gelangten abbildenden Funktionen waren stetig und beliebig oft differenzierbar, ja sogar analytisch (in eine Taylorsche Reihe entwickelbar); dafür ließen wir aber auch mehrdeutige, ja sogar unendlichvieldeutige Funktionen (z. B. den Logarithmus) zu. Jetzt wollen wir gerade das Hauptgewicht darauf legen, daß unsere abbildenden Funk-

stimmen ausnahmslos umkehrbar eindeutig seien, und im übrigen von ihnen nur Stetigkeit verlangen, auf die Existenz von Differentialquotienten etc. aber kein Gewicht legen; wir fragen dann nach den Eigenschaften von geometrischen Figuren, die bei diesen allgemeinsten eineindeutigen und stetigen Transformationen ungeändert bleiben. Denken Sie etwa, daß Sie eine Fläche oder ein Raumstück aus Kautschuk hergestellt und irgendwelche Figuren darin markiert haben; was bleibt von diesen Figuren erhalten, wenn Sie den Kautschuk in allgemeinster Weise verzerren?

Die Gesamtheit der Eigenschaften, die man so erhält, bildet das Gebiet der sog. Analysis situs, man könnte sagen, die Lehre von den reinsten Lagenverhältnissen, die von Größenbeziehungen ganz unabhängig ist. Jener Name rührt von Riemann her, der sich in seiner berühmten Arbeit von 1857 „Theorie der Abelschen Funktionen" [1] von funktionentheoretischen Interessen aus zu solchen Untersuchungen veranlaßt sah. Uebrigens hält man es seitdem meist so, daß man von der Analysis situs in der Geometrie ganz schweigt,

1) Journ. f. d. r. u. a. Mathem. Bd. 54 = Ges. Mathem. Werke (2. Aufl. Leipzig 1892) pag. 88. – Das Wort „Analysis" gebraucht Riemann hier an Leibniz anknüpfend, in seinem ursprünglichen methodischen, nicht in seinem mathematisch technischen Sinne.

und sie nur in der Funktionentheorie heranzieht, wenn man sie braucht. Anders macht es jedoch Möbius, der sich in einer Arbeit vom Jahre 1863 [1] vom rein geometrischen Interesse aus mit der Analysis situs beschäftigt; er nennt dort Figuren, die durch eineindeutige stetige Verzerrungen auseinander hervorgehen, elementarverwandt, weil die bei diesen Transformationen invarianten Eigenschaften die einfachsten überhaupt möglichen sind.

Wir wollen uns nun hier auf die Untersuchung von Flächen beschränken. Da ist zuerst eine erst von Möbius entdeckte Eigenschaft zu nennen, die Riemann noch entgangen war: Die Unterscheidung nämlich, ob eine Fläche einseitig oder zweiseitig ist. Wir hatten ja schon früher (S. 38 f.) von dem einseitigen Möbiusschen Polyeder und dem Möbiusschen Blatte gesprochen, wo man durch stetiges Hinwandern längs der Fläche unvermerkt von der einen Seite nach der anderen gelangen konnte, so daß eine Unterscheidung zweier Seiten keinen Sinn mehr hat. Es ist klar, daß diese Eigenschaft bei allen stetigen Verzerrungen erhalten bleibt, und daß man daher tatsächlich in der Analysis situs von vornherein einseitige und zweiseitige Flächen zu scheiden

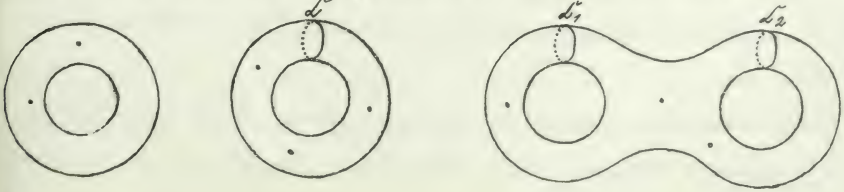
---

1) „Theorie der elementaren Verwandtschaft." Berichte über d. Verhandl. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. Math.-phys. Klasse Bd. 15. – Ges. Werke II (Leipzig 1886) pg. 433 ff.

hat.

Wir wollen uns hier der Einfachheit halber nur mit zweiseitigen Flächen beschäftigen, zumal sie allein in der Funktionentheorie vorkommen; übrigens ist die Theorie der einseitigen Flächen nicht etwa wesentlich schwieriger. Da ergibt sich dann, daß für eine Fläche im Sinne der analysis situs 2 ganze Zahlen vollkommen charakteristisch sind: die Anzahl p ihrer Randkurven und die Anzahl q ihrer nichtzerstückelnden Rückkehrschnitte (das sog. „Geschlecht"); genau gesagt, zwei zweiseitige Flächen können dann und nur dann aufeinander eindeutig und stetig bezogen werden, sie sind „elementarverwandt" oder – wie man heute sagt – homöomorph, wenn jene beiden Zahlen p und q für sie übereinstimmen. Es würde zu weit führen, wenn ich dieses Theorem hier beweisen wollte; ich kann nur an einigen Beispielen die Bedeutung der beiden Zahlen p und q erläutern.

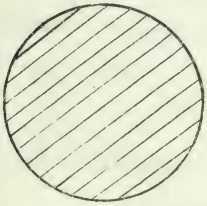
Stellen wir uns nebeneinander eine Kugel, eine Ringfläche und endlich eine Doppelringfläche (von der Form einer Brezel)



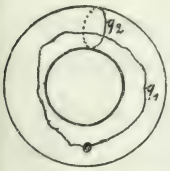
vor. Alles sind geschlossene Flächen, d. h. sie haben keine Randkurve: $p = 0$. Im ersten Falle zerfällt durch jeden geschlossenen Schnitt die Fläche in 2 getrennte Teile, d. h. es ist auch $p = 0$. Im zweiten Falle stellt eine Meridiankurve Δ einen in sich zurücklaufenden Schnitt dar, der die Fläche nicht zerlegt; ist er aber einmal gezogen, so zerstückelt jeder weitere Rückkehrschnitt tatsächlich die Fläche, und das meinen wir, wenn wir $p = 1$ sagen. Im dritten Beispiele endlich ist $p = 2$, wie die beiden verschiedenen Meridiankurven Δ_1, Δ_2 auf den getrennten Henkeln zeigen. Durch Anfügung weiterer Henkel können wir nun sofort zu Flächen mit beliebigem p aufsteigen. Wollen wir aber auch noch p einen beliebigen von 0 verschiedenen Wert erteilen, so brauchen wir nur in diesen Flächen p kleine Löcher, sog. „Punktierungen", anzubringen, die jedesmal eine Randkurve liefern. So können wir tatsächlich Flächen mit beliebigen Werten von p und p herstellen, und diesen müssen dann alle anderen Flächen mit demselben p, p homeomorph sein, wenn sie auch ein noch so verschiedenes Aussehen haben; die Funktionentheorie liefert ja viele Beispiele solcher Flächen.

Ich muß noch hier den weiteren Terminus Zusammenhang erklären, den Riemann einführt; er versteht

darunter die Zahl $2p + \mu$ und nennt die Fläche $(2p + \mu)$-fach zusammenhängend. Ist eine Fläche einfach zusammenhängend ($2p + \mu = 1$), so folgt $p = 0$, $\mu = 1$, d. h. sie ist einer Kugel mit einer Punktierung homöomorph, die man durch Verbreiterung dieses Loches auch stetig in eine ebene Kreisscheibe verwandeln kann.



Weiterhin führt nun Riemann den Begriff des Querschnittes ein, d. h. ein Schnitt, der von einem Randpunkt zu einem anderen führt; man kann von Querschnitten also nur reden, wenn tatsächlich Randkurven vorhanden sind, also $\mu > 0$ ist. Nun gilt der Satz, daß jeder Querschnitt den Zusammenhang um 1 vermindert, so daß man insbesondere jede Fläche mit $\mu > 0$ durch $2p + \mu - 1$ Querschnitte in eine einfach zusammenhängende verwandeln kann. Nehmen wir z. B. eine Ringfläche mit einer Punktierung ($p = \mu = 1$), so legen wir erst den Querschnitt q_1 von dieser Punktierung aus, und dann den Querschnitt q_2, der von jenem ersten Schnitt ausgeht und wieder in ihm einmündet, und übrigens genau wie der frühere nicht zerstückelnde Rückkehrschnitt verläuft; dann ist der Zusammenhang tatsächlich von $2 \cdot 1 + 1 = 3$ auf 1 erniedrigt.



Was Literatur zur Analysis situs anlangt, so ist eine zusammenfassende Darstellung nicht nur für Flächen, sondern auch für beliebig ausgedehnte Gebilde neuerdings in dem Referat in der math. Encyklopädie von H. Dehn und P. Heegaard (III A B 3) gegeben, das freilich sehr abstrakt geschrieben ist. Eine leichter lesbare auch dem Laien zugängliche Darstellung, die der abstrakten Theorie eine Entwicklung der allgemeinen Ideen an einfachen Beispielen vorausschickt, wäre sehr wünschenswert.

Daß die Analysis situs in der Physik, speziell in der Potentialtheorie Anwendung findet, ist bekannt. Aber auch in den Schulunterricht greift sie ein, und zwar mit dem Eulerschen Polyedersatz, über den ich nun noch ein Wort sagen will. Euler bemerkte, daß für ein ebenflächiges gewöhnliches Polyeder mit E Ecken, K Kanten und F Seitenflächen stets die Gleichung

$$E + F = K + 2$$

gilt. Wenn man nun das Polyeder irgendwie eineindeutig und stetig deformiert, so wird an jenen 3 Zahlen und dieser Gleichung nichts geändert, und sie gilt daher schließlich noch, wenn E, F, K die Anzahlen der Ecken, Flächen, Kanten einer beliebigen Einteilung der Kugel oder überhaupt einer dieser homöomorphen Flächen bezeichnen, sofern nur jedes Teilgebiet einfach zu-

zusammenhängend ist. Nun kann man das Theorem aber sogleich auf Flächen beliebigen Geschlechts verallgemeinern: Teilt man irgend eine Fläche, die gerade p nicht zerstückelnde Rückkehrschnitte zuläßt, durch K Linienstücke in F einfach zusammenhängende Flächenstücke, wobei E Ecken auftreten, so gilt stets:

$$E + F = K + 2 - 2p.$$

Ich überlasse es Ihnen, sich hierfür Beispiele zu machen und den Beweis sich selbst zu überlegen oder bei Dehn-Heegaard nachzulesen; natürlich gibt es noch sehr viel weitergehende Verallgemeinerungen dieses Satzes.

Wir verlassen damit endlich die Punkttransformationen überhaupt, und wollen im folgenden einen Ueberblick über die wichtigsten

IV. Transformationen mit Wechsel des Raumelementes

zu gewinnen versuchen. Zuerst bieten sich da

1. die dualistischen Transformationen

dar, die im zweidimensionalen Gebiete Punkt und Gerade, im dreidimensionalen Punkt und Ebene vertauschen. Ich beschränke mich hier auf den ersten Fall und wähle im übrigen die Darstellung, die zuerst Plücker 1831 im zweiten Teile seiner „analytisch-geometrischen Entwicklungen“ [1] gegeben hat, und die die analytische Formulierung voranstellt.

[1] Zitiert S. 115.

Die erste dort zu Grunde liegende Idee ist, wie ich es ja schon früher (S. 119) ausführte, die, die Konstanten u, v der in der Form

$$(1) \qquad u x + v y = 1$$

geschriebenen Geradengleichung als Linienkoordinaten mit den gewöhnlichen Punktkoordinaten durchaus in Parallele zu stellen, und mit beiden Koordinatenarten in ganz analoger „dualer" Weise das Gebäude der analytischen Geometrie aufzuführen. So entsprechen sich insbesondere in der Ebene die durch die Punktgleichung $f(x\,y) = 0$ als geometrischer Ort von Punkten dargestellte Kurve und die durch die Geradengleichung $f(u, v) = 0$ als Umhüllungsgebilde einer einfach unendlichen Geradenschar definierte Kurve.

Eine eigentliche Transformation, wie wir sie hier betrachten wollen, erhalten wir natürlich erst, wenn wir neben die bisher betrachtete eine Ebene $\mathfrak{E}$ noch eine zweite $\mathfrak{E}'$ stellen, und die Geradenkoordinaten u, v in $\mathfrak{E}$ zu den Punktkoordinaten x', y' in $\mathfrak{E}'$ in Beziehung setzen; die allgemeinste Transformation dieser Art wäre also durch 2 Gleichungen

$$(2) \qquad u = \varphi(x', y') \,, \quad v = \chi(x', y')$$

gegeben, d. h. jedem Punkt x', y' in $\mathfrak{E}'$ wird die Gerade in $\mathfrak{E}$ zugeordnet, deren Gleichung sich durch Eintragen

dieser Worte in (1) ergibt. Betrachten wir zunächst

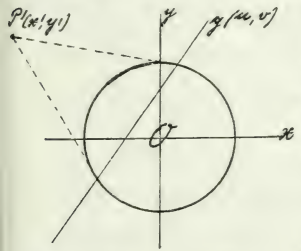
1.) das einfachste Beispiel einer solchen Transformation, das durch die Gleichungen:

$$(3) \qquad u = x' \quad , \quad v = y'$$

gegeben ist; durch sie wird also dem Punkte x', y' der Ebene $\mathfrak{E}'$ in $\mathfrak{E}$ einfach die Gerade

$$(3^{a=}) \qquad x'x + y'y = 1$$

zugeordnet. Es ist bekannt, daß diese Gleichung gerade diejenige Gerade darstellt, die dem Punkte x', y' (wir denken nun jetzt die Ebene $\mathfrak{E}, \mathfrak{E}'$ so aufeinandergelegt, daß ihre Koordinatensysteme sich decken) in Bezug auf den Einheitskreis um den Nullpunkt ($x^2 + y^2 = 1$) als Polare zugeordnet ist, so daß unsere Transformation also nichts als diese bekannte Polarenverwandtschaft ist.



Wir bemerken nun, daß an Stelle der beiden Gleichungen (3) auch die eine Gleichung ($3^{a=}$) allein zur Definition der Verwandtschaft hinreicht, da sie die Gleichung der jedem Punkt entsprechenden Geraden darstellt. Da sie in x, y einerseits, x', y' andererseits völlig symmetrisch ist, so müssen für unsere Verwandtschaft die beiden Ebenen $\mathfrak{E}, \mathfrak{E}'$ genau die gleiche Rolle spielen, d. h. es muß auch jedem Punkte von $\mathfrak{E}$ eine Gerade in $\mathfrak{E}'$ entsprechen und bei aufeinandergelegten Ebe-

nen muß einem Punkte dieselbe Gerade entsprechen, gleichgültig, ob wir ihn nach $\mathfrak{E}$ oder nach $\mathfrak{E}'$ rechnen; im Hinblick auf die erste Eigenschaft bezeichnet man die Transformation im engeren Sinne als dualistisch, im Hinblick auf die zweite als reziprok. Man kann also schlechthweg, ohne die beiden Ebenen zu unterscheiden, von der Zuordnung einer bestimmten Polare zu einem Pole sprechen und hat dann die Reziprozitätseigenschaft in der früher (S. 116.) bereits angegebenen Weise auszudrücken.

Hinsichtlich der weiteren Eigenschaften dieser Transformation bemerke ich hier nur, daß wir einer vom Punkte x', y' durchlaufenen Kurve der Ebene $\mathfrak{E}'$ gemäß dem Dualitätsprinzip als entsprechendes Gebilde die von den entsprechenden Geraden u, v umhüllte Kurve der Ebene $\mathfrak{E}$ zuordnen werden.

2.) Man kann nun leicht ganz analog zu unseren früheren Erörterungen über die allgemeinsten „Kollineationen" beweisen, daß die allgemeinste dualistischen Verwandtschaft entsteht, wenn man in Verallgemeinerung des Ansatzes (3) u, v gleich allgemeinen linear gebrochenen Funktionen von x', y' mit dem gleichen Nenner setzt:

$$(4) \qquad \begin{cases} u = \dfrac{a_1 x' + b_1 y' + c_1}{a_3 x' + b_3 y' + c_3} \\ v = \dfrac{a_2 x' + b_2 y' + c_2}{a_3 x' + b_3 y' + c_3} \end{cases}$$

Führt man das in die Gleichung (1) ein, so entsteht nach Heraufmultiplizieren mit dem gemeinsamen Nenner wegen der Willkürlichkeit der 9 Koeffizienten $a_1 \dots c_3$ die allgemeinste sowohl in x, y als auch in x', y' lineare Gleichung:

$$(4^a_{\pm}) \quad a_1 x x' + b_1 x y' + c_1 x + a_2 y x' + b_2 y y' + c_2 y - a_3 x' - b_3 y' - c_3 = 0.$$

Umgekehrt stellt aber auch jede solche in x, y und x', y' „bilineare" Gleichung eine dualistische Transformation zwischen den Ebenen $\mathfrak{E}, \mathfrak{E}'$ dar; denn sowie man das eine Koordinatenpaar festhält, d. h. einen festen Punkt in einer der beiden Ebenen betrachtet, ist sie in den anderen beiden Koordinaten linear und stellt daher eine jenem Punkte zugeordnete Gerade der anderen Ebene dar.

3) Diese Verwandtschaft ist aber im allgemeinen nicht auch reziprok im oben definierten Sinne, vielmehr ist sie das nur dann, wenn immer zwei symmetrische Terme in $(4^a_{\pm})$ denselben Koeffizienten haben, wenn jene Gleichung also lautet:

$$(5) \quad A x x' + B(x y' + y x') + C y y' + D(x + x') + E(y + y') + F = 0.$$

Diese Verwandtschaft ist dann aber wieder aus der Kegelschnittlehre wohl bekannt; sie ist nichts als die Zuordnung von Pol und Polare in Bezug auf den Kegelschnitt:

$$A x^2 + 2 B x y + C y^2 + 2 D x + 2 E y + F = 0,$$

und jede solche Polarenverwandtschaft ist eine dualistische reziproke Transformation.

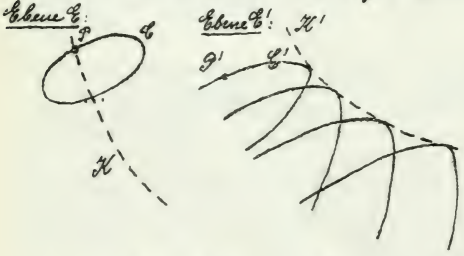
Nun kann man aber von diesen Ansätzen ganz leicht zu den allgemeineren Transformationen mit Wechsel des Raumelementes aufsteigen, die man seit Lie

2. Berührungstransformationen

nennt; man braucht nur statt der bilinearen Gleichung (4 a) irgend eine beliebige höhere Gleichung in den 4 Punkt-Koordinaten beider Ebenen:

$$(1) \qquad R(x, y; x', y') = 0$$

an die Spitze zu stellen, die man nach Plücker als Sequa-tio directrix oder Leitgleichung bezeichnet; die hier in Betracht kommenden Entwicklungen für die Ebene sind übrigens bereits sämtlich in Pluckers oben genann-tem Werke [1] enthalten. Halten wir zunächst x, y fest, d. h. betrachten wir einen bestimmten Punkt P in $\mathfrak{E}$, so stellt $R = 0$ als Gleichung für die laufen-den Koordinaten x', y' eine bestimmte Kurve $\mathfrak{C}'$ in der



Ebene $\mathfrak{E}'$ dar und diese Kur-ve ordnen wir, – so wie bisher die Gerade –, dem Punkte P zu. Nehmen wir aber nun einen festen Punkt $P'(x'|y')$ in $\mathfrak{E}'$, et-wa auf der Kurve $\mathfrak{C}'$ an, so ordnet ihm dieselbe Gleichung

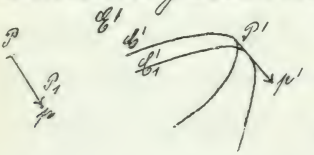
1) loc. cit. pag. 259 – 265

$R = 0$, in der wir jetzt dem zweiten Variablenpaare x', y' feste Werte erteilen und das erste als laufende Koordinaten auffassen, eine bestimmte Kurve C in $\mathfrak{C}$ an, die natürlich durch jenen ersten Punkt P gehen muß. Damit haben wir die Punkte P in $\mathfrak{C}$ den ∞^2 Kurven C' in $\mathfrak{C}'$ und die Punkte P' von $\mathfrak{C}'$ den ∞^2 Kurven C von $\mathfrak{C}$ zugeordnet – genau wie vorhin die Punkte den Geraden.

Möge sich nunmehr ein Punkt P in $\mathfrak{C}$ auf einer ganz beliebigen (gestrichelt gezeichneten) Kurve K bewegen; jeder einzelnen Lage von P entspricht dann eine bestimmte Kurve C' in $\mathfrak{C}'$, so daß wir dort im ganzen eine einfach unendliche Kurvenschar erhalten. Wollen wir aber eine einzige Kurve in $\mathfrak{C}'$ erhalten, die wir der Kurve K in $\mathfrak{C}$ entsprechen lassen können, so übertragen wir genau das allgemeine, schon bei der dualistischen Verwandtschaft angewandte „Envelopperenprinzip": Wir ordnen K diejenige Kurve K' in $\mathfrak{C}'$ zu, die von den vermöge $R = 0$ den einzelnen Punkten von K entsprechenden Kurven C' umhüllt wird, ihre Enveloppe. So haben wir aus der Zeitgleichung $R = 0$ tatsächlich eine Transformation der Ebenen gemacht, in der jeder Kurve der einen eine bestimmte Kurve der anderen entspricht, denn ganz dieselben Erörterungen können

wir auch von einer beliebigen Kurve K' in $\mathfrak{E}'$ ausgehend ausstellen.

Um diese Betrachtungen auch analytisch verfolgen zu können, denken wir uns die Kurve K durch ein eingeschriebenes geradliniges Polygon mit lauter sehr kleinen Seiten ersetzt, wie man das in der Differentialrechnung der Anschaulichkeit halber gern tut, und fragen erst einmal, was einer einzigen solchen Polygonseite denn entspricht. Hierbei ist natürlich immer an den Grenzübergang zur Kurve zu denken, so daß wir unter der Polygonseite schließlich nichts als einen Punkt P und eine Richtung (die Tangentenrichtung von K in ihm), ein sog. Linienelement zu verstehen haben. Wir nehmen nun in dieser Richtung von P einen Nachbarpunkt P_1 mit den Koordinaten $x + dx$, $y + dy$ an, wobei dx, dy beliebig klein sind und schließlich gegen Null konvergieren, aber $\frac{dy}{dx}$ stets den bestimmten die gegebene Richtung charakterisierenden Wert p beibehält. Dem Punkte P entspricht in $\mathfrak{E}'$ die Kurve $\mathfrak{C}'$, deren Gleichung in laufenden Koordinaten x', y'



$$\Phi(x, y; x', y') = 0$$

ist, dem Punkte P_1 aber entspricht die Kurve $\mathfrak{C}_1'$ mit

der Gleichung

$$\mathfrak{L}(x + dx,\ y + dy;\ x', y') = 0,$$

oder wenn wir nach dx und dy entwickeln und wegen der schließlichen Grenzübergänge nur die linearen Glieder berücksichtigen:

$$\mathfrak{L}(x, y;\ x', y') + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y}\,dy = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich der Schnitt $P'(x', y')$ von C' und C_1'; wir können sie, da wir $\frac{dy}{dx} = p$ gesetzt hatten, auch schreiben:

$$(2.) \qquad \begin{cases} \mathfrak{L}(x, y;\ x', y') = 0 \\ \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y}\,p = 0 \end{cases}.$$

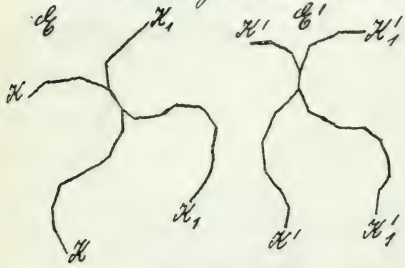
Hierdurch ist x', y' völlig bestimmt, wenn man nur x, y und p kennt. Weiterhin aber haben C' und C_1' in P' die Tangentenrichtung $p' = \frac{dy'}{dx'}$ in der Grenze gemein; da $\mathfrak{L} = 0$ die Gleichung von C' in laufenden Koordinaten x', y' ist, bestimmt diese Tangentenrichtung sich aus der Gleichung:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x'}\,dx' + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y'}\,dy' = 0, \text{ oder}$$

$$(3.) \qquad \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x'} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y'}\cdot p' = 0.$$

Jedem Linienelemente $x\,|\,y\,|\,p$ der Ebene C d. h. jedem Punkt $x\,|\,y$ samt einer Fortschreitungsrichtung p ist also in dieser Weise ein ganz bestimmtes Linienelement $x'\,|\,y'\,|\,p'$ in der Ebene C' durch die Gleichungen (2) und (3) zugeordnet.

Indem wir diese Betrachtung nun auf jede einzelne der Polygonseiten oder Linienelemente anwenden, durch die wir die in $\mathfrak{C}$ gegebene Kurve K approximierten, erhalten wir in $\mathfrak{C}'$ eine entsprechende Folge von Linienelementen oder ein entsprechender Polygon, das in der Grenze die K entsprechende Kurve K' liefert. Ist also bei der zuletzt angewandten Bezeichnung P ein beliebiger Punkt von K, p die Tangentenrichtung daselbst, so ist P' der entsprechende Punkt von K' und p' die zugehörige Tangentenrichtung. Die Gleichungen (2) liefern daher sofort die Gleichung von K', wenn wir für x, y, p Koordinaten bezw. Tangentenrichtung des Punktes P einsetzen und P auf K laufen lassen.



Nun wird auch klar, warum Lie diese Transformationen Berührungstransformationen nannte. Denn berühren sich 2 Kurven in $\mathfrak{C}$, so heißt das approximativ nichts anderes, als daß sie eine Polygonseite, ein Linienelement gemein haben; also müssen auch die entsprechenden Kurven in $\mathfrak{C}'$ ein Linienelement, d. h. einen Punkt und die Richtung in ihm gemein haben. Die Berührung zweier Kurven ist also bei der

Transformation eine invariante Eigenschaft, und das soll jener Name aussagen. Sie hat nun die Lehre von diesen Berührungstransformationen namentlich im Raume wesentlich weiter entwickelt; eine zusammenfassende Darstellung hat er gemeinsam mit Scheffers 1896 in der „Geometrie der Berührungstransformationen" [1] begonnen, die leider nicht über den ersten Band herausgekommen ist.

Nachdem ich so die Theorie der Transformationen mit Wechsel des Raumelements allgemein kurz dargelegt habe, will ich sie wenigstens durch einige wenige

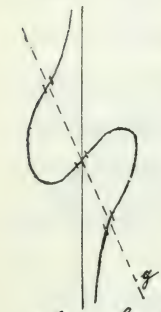
3. Beispiele

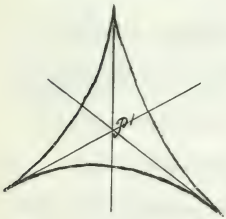
anschauungsmäßig beleben, und zeigen, was man in den Anwendungen mit diesen Dingen anfangen kann.

Lassen Sie mich zunächst von den dualistischen Transformationen reden und der Rolle, die sie in der Lehre von den Gestalten algebraischer Kurven spielen. Wir wollen zusehen, wie sich typische Kurvengestalten bei dualistischen Umformungen, etwa bei der reziproken Polarenverwandtschaft in Bezug auf einen Kegelschnitt, verändern, und müssen uns dabei natürlich auf ganz wenige charakteristische Fälle beschränken. So hebe ich zunächst bei der Kurve dritter Ordnung den Typus

1) Bd. I. Leipzig 1896.

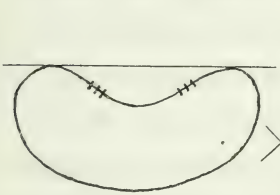
des unpaaren Zuges hervor, der von jeder Geraden in 3 oder 1 reellen Punkt geschnitten wird. In der nebenstehenden Zeichnung hat er 1 Asymptote; man kann daraus aber sofort eine Gestalt mit 3 Asymptoten herleiten, indem man eine solche projektive Umformung vornimmt, daß eine die Kurve dreimal schneidende Gerade in die unendlich ferne Gerade übergeht. Jedenfalls aber hat die Kurve 3 reelle Wendepunkte, die die besondere Eigenschaft haben, in einer Geraden g zu liegen. Bei der Dualisierung entsteht nun daraus eine Kurve dritter Klasse, an die von jedem Punkt aus 1 oder 3 reelle Tangenten gehen. Dem Wendepunkt entspricht dabei eine Spitze, was man freilich sich durch eingehende Ueberlegung klar machen muß; Sie finden solche Betrachtungen übrigens ausführlich in meinen früheren geometrischen Vorlesungen. Die Kurve dritter Klasse, die hier entsteht, hat also im ganzen 3 Spitzen und die Tangenten daselbst müssen durch ein und denselben Punkt P' gehen, welcher der die 3 Wendepunkte enthaltenden Geraden g dual entspricht.



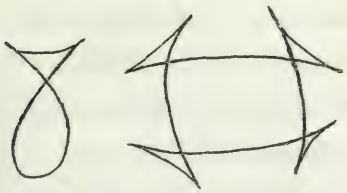


Analoge Kurve angeben will ich noch über die

Kurve 4. Ordnung und 4. Klasse machen. Bei einer Kurve 4. Ordnung kann zum ersten Mal die Gestalt eines Ovales mit einer Einbuchtung auftreten; ja es können sogar Gestalten mit 2, 3 und 4 Einbuchtungen auftreten. Im ersten Falle sind 2 Wendepunkte und 1 Doppeltangente, in dem weiteren bis zu



8 Wendepunkten und 4 Doppeltangenten vorhanden. Dualisieren wir, so haben wir zu dem oben bereits gesagten noch neu hinzuzuüberlegen, daß einer Doppeltangente dual ein Doppelpunkt entspricht. Es entstehen also Typen von Kurven 4. Klasse mit 2 bis 8 Spitzen und 1 bis 4 Doppelpunkten, wie nebenstehend skizziert. Es hat einen eigenen Reiz, die Lehre von den algebraischen Gestalten eingehender durchzuarbeiten; ich kann sie hier leider nicht näher verfolgen und muß mich mit diesen kurzen Hinweisen begnügen; sie zeigen aber wohl hinreichend, wie unsere dualistischen Transformationen Dinge unter das gleiche Gesetz bringen, die für

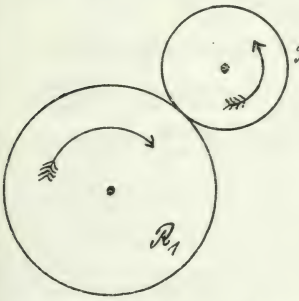


die naive Anschauung so verschieden wie nur möglich sind.

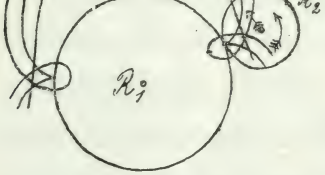
Ich komme nun zu den Anwendungen der Theorie der Berührungstransformationen, und hier zeigt es sich in interessanter Weise, daß die Idee der Berührungstransformation wie die meisten theoretisch wirklich guten Gedanken auch tatsächlich ein reiches Feld in der Praxis findet, und daß man sie dort schon lange vor ihrer theoretischen Durcharbeitung wirklich gehandhabt hat. Es ist die alte Lehre von den Zahnrädern, die das interessanteste Anwendungsgebiet gibt. Sie bildet ein spezielles Kapitel der Kinematik, der allgemeinen Lehre von den Bewegungsmechanismen, die von zentraler Bedeutung z. B. für die Maschinentechnik ist; in diese Kinematik gehören ja auch die Geradführungen hinein, von denen wir neulich ein Beispiel hatten. Ich kann in dieser Vorlesung natürlich immer nur solche kleine Teile jeder einzelnen Disziplin, wie hier der Kinematik, herausgreifen und an einfachsten Beispielen ihren Sinn und ihre Bedeutung möglichst handgreiflich wesentlich referierend schildern. Im einzelnen müssen Sie sich dann nach diesen Anregungen in Spezialdarstellungen zurechtzufinden suchen; als Hauptorientierungsmittel in dem Gesamtgebiet der Kinematik empfehle ich da wieder das einschlägige Encyklopae-

diereferat von Schoenflies (Enc. IV, 3), das auch über die gewaltige Literatur gut Auskunft gibt.

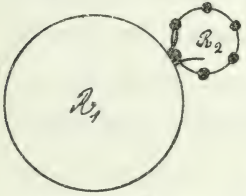
Die Aufgabe der Zahnradkonstruktionen ist, gleichförmige Bewegung von einem Rade auf ein anderes zu übertragen; da dabei aber auch Kräfte übertragen werden sollen, so genügt es nicht, die Räder aufeinander abrollen zu lassen, sondern man muß dem einen Rade Vorsprünge, Zähne, geben, die in Lücken des anderen eingreifen. Das Problem ist also, die Profile oder Flanken dieser Zähne so zu gestalten, daß eine gleichförmige Drehung des einen Rades auch eine gleichförmige Drehung des anderen bewirkt; das ist gewiß auch eine geometrisch sehr interessante Fragestellung. Die Lösung ist die, daß die Zähne des einen Rades wesentlich willkürlich gewählt werden können, mit Beschränkungen, die nur durch die praktische Verwertbarkeit bedingt werden (daß die einzelnen Zähne nicht miteinander kollidieren u. dgl.); die Zähne des zweiten Rades sind aber dann mit bestimmt, und zwar leiten sie sich durch eine ein für alle Male fest stehende Berührungstransformation aus den Zähnen des ersten Rades ab.



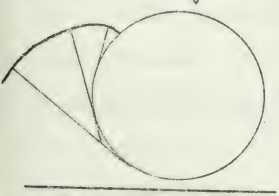
Wenn wir unser Problem näher betrachten, so bemerken wir zunächst, daß es nur auf die Relativbewegung beider Räder gegeneinander ankommt; es ist am bequemsten, das eine Rad R_1 überhaupt festzuhalten und das andere R_2 neben seiner Drehung noch um R_1 herumlaufen zu lassen. Dabei beschreibt dann jeder Punkt, der mit R_2 fest verbunden ist, in der festen Ebene von R_1 eine Epizykloide, und zwar ist diese gestreckt, hat Spitzen oder ist verschlungen, je nachdem der betrachtete Punkt innerhalb, auf, oder außerhalb der Peripherie von R_2 liegt. Damit ist jedem Punkt der beweglichen Ebene von R_2 in der festen Ebene von R_1 eine bestimmte Kurve zugeordnet, und wenn wir zu der diese Zuordnung vermittelnden Gleichung nach dem eben angegebenen Verfahren die Berührungstransformation ermitteln, so haben wir gerade die bereits in Aussicht gestellte für die Zahnräder charakteristische Berührungstransformation; man sieht nämlich leicht ein, daß zwei einander vermöge dieser Berührungstransformation entsprechende Kurven bei der Bewegung tatsächlich aufeinander abrollen.



Um nun kurz die wirkliche Ausführung dieses Prinzips zu schildern, wähle ich den einfachsten möglichen Fall, die sog. Triebstockverzahnung. Da sind die Zähne von R_2 einfach Punkte, oder vielmehr, da diese keine Kraftübertragung geben würden, kleine kreisförmige Zapfen, die sog. Triebstöcke. Jedem Kreis entspricht nun durch die Berührungstransformation eine Kurve, die sich sehr wenig von einer Epizykloide unterscheidet, und die einfach eine Parallelkurve zu ihr in einem dem Kreisradius gleichen Abstande ist. Auf diesen Kurven rollen die Triebstöcke bei der Drehung ab und es sind immer ihre Anfänge in dem Modell, das ich Ihnen hier vorlege, als Zähne realisiert, bis im weiteren Verlauf jedesmal der nächste Zahn eingreift.



Ich lege Ihnen hier gleichzeitig noch zwei andere Modelle für gleichfalls in der Praxis viel benutzte Verzahnungen vor, die Evolventen- und die Zykloiden-verzahnung.[1] Bei der ersten bestehen, wie ich hier nur ganz kurz berichten will, die Zahnprofile beider Räder aus Kreisevolventen, das sind Kurven, die durch das Abwickeln eines gespannten Fadens



1) Alle diese Modelle sind von F. Schilling konstruiert (Verlag von M. Schilling, Halle a. S.)

von einem Kreise entstehen und deren Evoluten also Kreise sind; bei der anderen sind sie aus Zykloidenstücken zusammengesetzt.

Ich hoffe Ihnen damit wenigstens eine erste Orientierung gegeben zu haben, was für Probleme hier in der Lehre von den Transformationen mit Wechsel des Raumelementes einsetzen; ich habe jetzt, bevor wir diesen zweiten von den Transformationen überhaupt handelnden Hauptteil verlassen, nur noch anhangsweise über ein wichtiges Kapitel zu reden, das in einer Encyklopädie der Geometrie nicht fehlen darf, nämlich über

V. Die Imaginärtheorie.

Die Lehre von Imaginären ist bekanntlich zuerst in der Algebra und Analysis ausgebildet worden, speziell in der Gleichungslehre und der Funktionentheorie Komplexer Variabler, wo sie ja ihre größten Triumphe gefeiert hat. Weiterhin hat man aber auch schon frühzeitig in der analytischen Geometrie den Variablen x, y komplexe Werte $x = x_1 + i x_2$, $y = y_1 + i y_2$ erteilt und damit — zunächst als bloße der Analysis angepasste Sprechweise ohne eigentlichen geometrischen Sinn — den reellen Punkten eine große Mannigfaltigkeit komplexer Punkte hinzugefügt.

Der Nutzen dieser Neueinführungen soll natürlich

darin bestehen, daß sie die bei Beschränkung auf reelle Variablen nötigen Fallunterscheidungen wegfallen lassen und das Aussprechen allgemeiner ausnahmsloser Sätze gestatten. Ganz analoge Ueberlegungen hatten uns ja bereits in der projektiven Geometrie zur Einführung der unendlichfernen Punkte sowie der von ihrer Gesamtheit gebildeten unendlichfernen Ebene bezw. Geraden geführt. Das eine wie das andere Mal tun wir das, was man passend als „Adjunktion uneigentlicher Punkte" zu den eigentlichen anschaulich erfaßbaren Punkten des Raumes zu bezeichnen pflegt.

Wir wollen nun beide Adjunktionen gleichzeitig vollziehen. Dazu führen wir erst, wie früher, homogene Koordinaten ein, also, um zunächst in der Ebene zu bleiben:

$$x = \frac{\xi}{\tau} \quad , \quad y = \frac{\eta}{\tau} \quad ,$$

und lassen nun für ξ, η, τ auch komplexe Werte zu. Betrachten wir nun beispielsweise eine quadratische Gleichung

$$A\xi^2 + B\xi\eta + C\eta^2 + 2D\xi\tau + 2E\eta\tau + F\tau^2 = 0 ,$$

so werden wir den Inbegriff aller ihr genügenden reellen und komplexen Wertsysteme ξ, η, τ (gleichgiltig, ob sie endliche oder unendlich ferne Punkte darstellen) eine Kurve zweiter Ordnung nennen. Man sagt dafür auch

manchmal wohl einfach Kegelschnitt, aber das kann, wenn nicht bei den Leuten, die die Sache kennen, so doch bei den Vielen, denen die Betrachtung imaginärer Elemente nicht geläufig ist, Missverständnisse hervorrufen; braucht ja z.B. eine Kurve nach dieser Definition keinen einzigen reellen Punkt zu enthalten.

Kombinieren wir das nun mit einer linearen Gleichung:

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\tau = 0,$$

die wir ähnlich als Definition einer Kurve 1. Ordn. (bezw. Gerade) auffassen. Diese beiden Gleichungen haben dann genau 2 Lösungstripel $\xi : \eta : \tau$ gemein, d.h. eine Kurve erster und eine zweiter Ordnung „schneiden" sich stets genau in 2 Punkten, die freilich reell oder komplex, endlich oder unendlich weit, getrennt oder zusammenfallend sein können. Die einzige Ausnahme ist die, dass die Kurve zweiter Ordnung in zwei Kurven erster Ordnung zerfällt, von denen zum mindesten die eine mit der vorgegebenen Kurve erster Ordnung übereinstimmt; dann ist jeder Punkt von dieser gemeinsamer Punkt. Das kommt darauf hinaus, dass die quadratische Gleichung, die durch Elimination einer Variabelen aus den beiden gegebenen Gleichungen entsteht, identisch verschwindet. Noch weitergehende Ausartungen

treten natürlich ein, wenn die eine oder gar beide der gegebenen Gleichungen selbst identisch verschwinden ($A = B = \ldots = F = 0$ oder $\alpha = \beta = \gamma = 0$); ich will jedoch alle diese und ähnliche Besonderheiten, die dem Wesen der Sache nach sämtlich trivial sind, im folgenden ganz bei Seite lassen. Dann können wir weiterhin z. B. den allgemeinen Satz aussprechen, daß 2 Kurven zweiter Ordnung stets gerade 4 Punkte gemein haben.

Führen wir nun auch im Raume homogene Koordinaten $\xi : \eta : \zeta : \tau = x : y : z : 1$ ein, und erteilen ihnen beliebige komplexe Werte; die Gesamtheit der Lösungen einer linearen bezw. einer quadratischen homogenen Gleichung in diesen 4 Variablen werden wir dann Fläche 1. Ordn. (Ebene) bezw. Fläche 2. Ordn. nennen. Dann gilt wiederum ganz allgemein – von trivialen Ausnahmen abgesehen –, daß eine Fläche 2. Ordn. von einer Ebene in einem Kegelschnitt geschnitten wird, und daß zwei Flächen 2. Ordn. sich in einer Raumkurve 4. Ordn. schneiden. Dabei ist es ganz gleich, ob diese Schnittkurven reelle Aeste haben oder nicht, im Endlichen oder Unendlichweiten verlaufen.

Nun hat bereits Poncelet 1822 in seinem schon genannten „Traité des propriétés projectives des figures"

diese Begriffe auf Kreise und Kugeln angewandt, freilich ohne homogene Koordinaten zu benutzen, indem er mehr einem starken Gefühle für geometrische Kontinuität folgte. Gehen wir, um seine merkwürdigen Resultate in praeziser Form kennen zu lernen, von der Kreisgleichung

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

aus, die wir homogen schreiben:

$$(\xi - a\tau)^2 + (y - b\tau)^2 - r^2\tau^2 = 0 .$$

Der Schnitt mit der unendlichfernen Geraden $\tau = 0$ wird also gegeben durch

$$\xi^2 + y^2 = 0 \quad , \quad \tau = 0 ,$$

und aus diesen Gleichungen sind alle den speziell zu Grunde gelegten Kreis charakterisierenden Konstanten a, b, r herausgefallen. Jeder beliebige Kreis schneidet also die unendlichferne Gerade in denselben beiden festen Punkten

$$\xi : y = \pm i \quad , \quad \tau = 0 \quad ,$$

die man die (imaginären) Kreispunkte nennt. Ganz genau so leitet man ab, daß alle Kugeln des Raumes die unendlichferne Ebene in ein und denselben imaginären Kegelschnitt schneiden:

$$\xi^2 + y^2 + \zeta^2 = 0 \quad , \quad \tau = 0 ,$$

den man wohl schlechtweg (imaginären) Kugelkreis

meint.

Es gilt aber auch das umgekehrte: Jeder Kegelschnitt, der durch die beiden Kreispunkte der unendlichferneren Geraden seiner Ebene geht, ist ein Kreis, und jede Fläche zweiter Ordnung, die die unendlichferne Ebene im Kugelkreis schneidet, ist eine Kugel, so daß wir hier charakteristische Eigenschaften von Kreis und Kugel haben.

Ich habe hier absichtlich nicht gesagt „unendlichferne" Kreispunkte und „unendlichferner" Kugelkreis, wie es wohl manchmal geschieht. Der Abstand der Kreispunkte vom Koordinatenanfangspunkt ist nämlich nicht bestimmt unendlich, wie man zunächst vielleicht glauben möchte, sondern er hat die Form

$$\sqrt{x^2+y^2} - \frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\varepsilon} = \frac{0}{0}$$

und ist demnach unbestimmt; je nach dem Grenzübergang an den Kreispunkten kann man ihm jeden beliebigen Wert erteilen. Ebenso ist die Entfernung der Kreispunkte von jedem anderen endlichen Punkte unbestimmt, und dasselbe gilt auch für alle Punkte des Kugelkreises hinsichtlich aller im Endlichen gelegenen Raumpunkte. Das ist nun keineswegs wunderbar, denn wir haben ja von den Kreispunkten gleichzeitig verlangt, daß sie von einem endlichen Punkte den Abstand r haben (auf dem Kreis mit r um ihm

liegen / und unendlich fern von ihnen liegen sollen; diesen scheinbaren Widerspruch kann die analytische Formel nur dadurch ausgleichen, daß sie jenem unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$ liefert. Man muß sich diese einfachen Dinge einmal ganz klar machen, da häufig Falsches darüber geredet und geschrieben wird.

Diese Kreispunkte und der Kugelkreis gestatten nun, die Theorie der Kreise und Kugeln der allgemeinen Theorie der Gebilde 2. Ordn. aufs schönste unterzuordnen, während für die elementare Betrachtung gewisse Verschiedenheiten zu bestehen scheinen. So spricht man in der elementaren analytischen Geometrie immer nur von zwei Schnittpunkten von zwei Kreisen, da die Elimination einer Unbekannten aus ihren Gleichungen nur auf eine quadratische Gleichung führt; tatsächlich haben die beiden Kreise aber noch auf der unendlich fernen Geraden die beiden Kreispunkte gemein, die die elementare Darstellung nicht berücksichtigt, und so kommen wir auf die durch das oben genannte allgemeine Theorem für 2 Kurven 2. Ordn. erforderliche Anzahl von 4 Schnittpunkten. Ganz analog spricht man zunächst immer nur von einem Kreise, in den 2 Kugeln sich treffen, und der übrigens reell oder imaginär sein kann; wir wissen jetzt aber, daß die Kugeln

in der unendlichfernen Ebene noch überdies den Kugelkreis gemein haben, und diese beiden Kegelschnitte bilden zusammen in der Tat eine Raumkurve 4. Ordn., die nach einem allgemeinen Satze über 2 Flächen 2. Ordn. der Schnitt der beiden Kugeln sein muß.

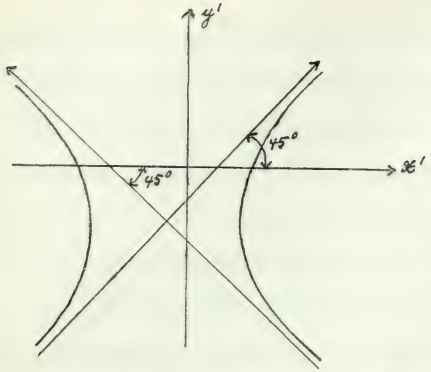
Ich möchte nun im Anschluß daran einige Worte über die sog. Imaginärtransformation sagen. Man versteht darunter Kollineationen mit imaginären Koeffizienten, die imaginäre Punkte, für die man sich gerade vorzugsweise interessiert, in reelle Punkte verwandeln. So wird man hier in der Theorie der Kreispunkte mit Vorteil die Transformation

$$\xi' = \xi$$
$$\eta' = i\eta$$
$$\tau' = \tau$$

verwenden; denn durch sie geht die Gleichung $\xi^2 + \eta^2 = 0$ in $\xi^2 - \eta'^2 = 0$ über, und daher werden die Kreispunkte $\xi : \eta = \pm i,\ \tau = 0$ in die reellen unendlich fernen Punkte

$$\xi' : \eta' = \pm 1,\quad \tau = 0$$

verwandelt, das sind die unendlich fernen Punkte der beiden um 45° gegen die Achsen geneigten Richtungen. Alle Kreise werden also in Kegelschnitte durch diese beiden reellen unendlichfernen Punkte übergeführt, und das sind einfach sämtliche gleich-



seitigen Hyperbeln, deren Asymptoten jene Winkel ± 45° mit den Achsen bilden. An dem Bilde dieser Hyperbeln kann man sich nun alle Theoreme über Kreise anschaulich klar machen, was für viele Zwecke, besonders auch bei den analogen Problemen im Raume, äußerst bequem und nützlich ist. Im Rahmen dieser Vorlesung muß ich es jedoch mit diesen Andeutungen genug sein lassen; nähere Ausführungen pflegt man in den Vorlesungen und Büchern über „projektive Geometrie" zu geben.

Es entsteht nun die Frage, ob man diesen imaginären Punkten, Ebenen, Kegelschnitten etc. etc. nicht auch rein geometrisch nahe kommen kann, ohne sie - wie wir es bisher taten - gewaltsam aus den Formeln der Analysis zu übernehmen. Die älteren Geometer, Poncelet und auch Steiner hatten hierüber noch keine Klarheit gewonnen; bei Steiner sind die imaginären Größen in der Geometrie noch „Gespenster", die gleichsam aus einer höheren Welt heraus sich in ihren Wirkungen bemerkbar machen, ohne daß wir von ihrem Wesen eine klare Vorstellung gewinnen können.

Erst v. Staudt hat in seinen schon früher genannten Werken, der „Geometrie der Lage“ [1] und den „Beiträgen zur Geometrie der Lage“, [2] jene Fragen vollkommen gelöst, und mit seinen Betrachtungen müssen wir uns noch ein wenig beschäftigen. Uebrigens sind diese Staudtschen Bücher recht schwer lesbar, da er seine Theorien ohne Bezugnahme auf analytischen Formeln und ohne induktive Hinweise sogleich in ihrer endgültigen Form deduktiv entwickelt; begreiflich verständlich ist ja immer nur die genetische Darstellung, die dem Autor bei der Entstehung seiner Ideen vermutlich eingeschlagenen Wege folgt.

Den beiden Werken von Staudts entsprechen 2 verschiedene Stadien der Entwicklung seiner Theorie, die ich nun beide kurz darlegen will. In dem Werke von 1846 handelt es sich zunächst nur um die Betrachtung irgend welcher Gebilde zweiten Grades mit reellen Koeffizienten – ich sage Gebilde, weil ich die Anzahl der Dimensionen (Gerade, Ebene oder Raum) unentschieden lassen will. Betrachten wir etwa einen Kegelschnitt in der Ebene, d. h. irgend eine homogene quadratische Gleichung in 3 Variablen mit reellen

1) Nürnberg 1846.
2) Nürnberg 1856 – 1860.

Koeffizienten:

$$A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 + 2D\xi\tau + 2E\eta\tau + F\tau^2 = 0;$$

für die analytische Behandlung ist es dann völlig gleichgültig, ob diese Gleichung überhaupt reelle Lösungen hat, oder nicht, d. h. ob die Kurve zweiter Ordnung einen reellen Zug besitzt, oder nur komplexe Punkte aufweist. Die Frage ist, was sich im letzteren Falle der reine Geometer dann anschauliches unter einer solchen Kurve denken, wie er sie mit geometrischen Mitteln definieren soll. Dieselbe Frage entsteht im eindimensionalen Gebiet, wenn wir die Kurve mit irgend einer Geraden, etwa der x-Achse $\eta = 0$ schneiden; dann werden die Schnitte – gleichgültig, ob sie reell oder imaginär sind – durch die Gleichung

$$A\xi^2 + 2D\xi\tau + F\tau^2 = 0$$

geliefert, und die Frage ist, ob man im Falle komplexer Wurzeln irgend einen geometrischen Sinn damit verbinden kann.

<u>v. Staudts Idee</u> ist nun folgende: <u>Er betrachtet statt der Kurve 2. Ordn. das ihr zugehörige Polarsystem</u>, von dem wir ja früher (S. 229) sprachen, d. i. eine dualistische reziproke durch die Gleichung

$$A\xi\xi' + B(\xi\eta' + \xi'\eta) + C\eta\eta' + D(\xi\tau' + \xi'\tau) + E(\eta\tau' + \eta'\tau) + F\tau\tau' = 0$$

dargestellte Verwandtschaft. Wegen der Realität der Koeffi-

Dieselben ist das eine durchaus reelle Beziehung, die jedem reellen Punkte eine reelle Gerade zuordnet – mag nun der Kurvenring selbst reell sein oder nicht. Das Polarsystem bestimmt aber seinerseits die Kurve vollkommen als Gesamtheit der Punkte, die auf ihren eigenen Polaren liegen, wobei es von vornherein unentschieden bleibt, ob solche Punkte reell existieren. In jedem Falle liefert aber das Polarsystem den an der Spitze der Untersuchung stehenden stets reellen Repräsentanten der durch die Gleichung definierten Kurve 2. Ordnung.

Schneiden wir nun mit der x-Achse, d. h. setzen wir y und y' gleich 0, so haben wir ganz analog dort eine eindimensionale stets reelle Polarenverwandtschaft, die durch die Gleichung

$$A\xi\xi' + \mathfrak{B}(\xi\tau' + \xi'\tau) + F\tau\tau' = 0$$

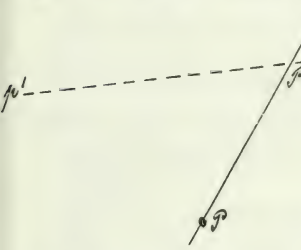
dargestellt wird, und immer 2 reelle Punkte einander reziprok zuordnet. Die Schnittpunkte der x-Achse mit dem Kegelschnitt sind die beiden in dieser Polarenverwandtschaft sich selbst entsprechenden Punkte, ihre sog. Grund- oder Ordnungspunkte. Sie können reell oder imaginär sein, jedenfalls wird auf sie selbst das Interesse erst in zweiter Linie gerichtet, und voran steht die Polarenverwandtschaft als ihr stets reeller Repräsentant.

Man nennt die Punktepaare $(\frac{E}{e}, \frac{E'}{e})$, die aus 2 in einer solchen eindimensionalen Polarenverwandtschaft sich entsprechenden Punkten bestehen, mit einem aus dem 17. Jahrhundert von Desargues herrührenden Ausdruck Punktepaare einer „Involution", und zwar unterscheidet man 2 Arten solcher Involutionen, je nachdem die Grundpunkte reell oder imaginär sind, und einen Uebergangsfall, in dem sie zusammenfallen. Die Hauptsache aber ist für uns hier der Involutionsbegriff schlechtweg; die Unterscheidung von Fällen, d. h. die Frage nach der Natur der Wurzeln der quadratischen Gleichung, hat erst sekundäres Interesse.

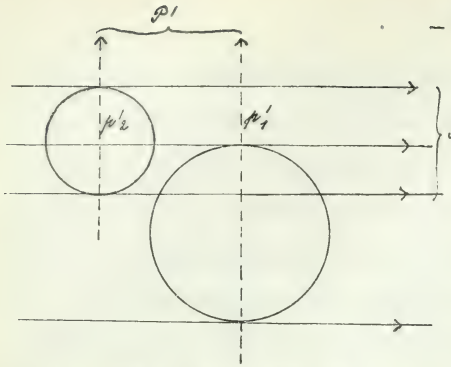
Mit diesen Betrachtungen, die sich natürlich auf 3 Dimensionen unmittelbar übertragen lassen, ist zwar das Imaginäre nicht gedeutet, aber doch – was Gebilde 2. Ordn. angeht – ein Standpunkt oberhalb des Unterschiedes von Reell und Imaginär gewonnen: Jedes Gebilde 2. Ordn. wird durch ein reelles Polarsystem dargestellt, und man kann mit ihnen geometrisch ebenso operieren, wie analytisch mit den reellen Gleichungen der Gebilde.

Ein Beispiel soll das näher zeigen. Denken wir uns einen Kegelschnitt, d. h. ein Polarsystem in der Ebene gegeben, und nehmen nun eine Gerade hinzu. Da sind

nun für die unmittelbare Anschauung der Kurve sehr viele verschiedene Fälle möglich, je nachdem die Kurve überhaupt reelle Punkte hat, oder nicht und im ersten Falle die Gerade reell schneidet, oder nicht. Jedenfalls aber wird durch das ebene Polarsystem auf der Geraden g ein lineares Polarsystem d. h. eine Involution festgelegt: Jedem Punkte P von g entspricht in ersterem eine Polare p' und die schneidet in g einen Punkt P' ein; die Punkte (P, P') durchlaufen die in Rede stehende Involution. Nachträglich kann man dann nach deren Grundpunkten fragen, und sehen, ob sie reell oder imaginär sind. Wir haben damit in geometrischer Sprache genau das gemacht, was wir zu Beginn dieser Erörterungen aus den Gleichungen schlossen.



Wir wollen nun diese Betrachtungen speziell auf die imaginären Kreispunkte und den Kugelkreis anwenden. Wir sagten früher, daß 2 beliebige Kreise die unendlichferne Gerade in denselben beiden Punkten, eben den Kreispunkten, schneiden; das wird jetzt also geometrisch bedeuten, daß ihre Polarsysteme auf der unendlichfernen Geraden ein und dasselbe Polarsystem, dieselbe Involution hervorrufen; in der Tat, ziehen wir



(vgl. S. 115) die Tangenten von einem unendlich fernen Punkte P an einen Kreis, so steht dessen Polare p'_1 als Verbindung ihrer Berührungspunkte auf ihrer gemeinsamen Richtung senkrecht. Da alle Geraden nach demselben unendlich fernen Punkte parallel sind, steht also auch seine Polare p'_2 in Bezug auf irgend einen zweiten Kreis auf derselben Richtung senkrecht und ist daher zu p'_1 parallel; mit anderen Worten, p'_1 und p'_2 schneiden die unendlichferne Gerade ihrerseits in demselben Punkte P'. Die Polarsysteme aller Kreise schneiden also – das ist das Resultat – in die unendlichferne Gerade ein und dasselbe Polarsystem, die sog. „absolute Involution" ein, deren jedes Punktepaar aus einem beliebigen endlichen Punkte betrachtet in zueinander senkrechten Richtungen erscheint.

Wir wollen diese Ueberlegung nun ins Analytische übertragen. Gehen wir von der homogenen Kreisgleichung

$$(\xi - a\tau)^2 + (y - b\tau)^2 - r^2\tau^2 = 0 \quad \text{oder}$$

$$\xi^2 + y^2 - 2a\xi\tau - 2by\tau + (a^2 + b^2 - r^2)\tau^2 = 0$$

aus, so ist die zugehörige Polarenverwandtschaft:

$$\xi\xi' + \eta\eta' - \alpha(\xi\tau' + \xi'\tau) - b(\eta\tau' + \eta'\tau) + (a^2 + b^2 - r^2)\tau\tau' = 0;$$

wir erhalten daraus die auf der unendlichferneen Geraden erzeugte Verwandtschaft, wenn wir $\tau = \tau' = 0$ setzen:

$$\xi\xi' + \eta\eta' = 0, \quad \tau = 0, \quad \tau' = 0.$$

Diese Gleichungen sind in der Tat von den speziellen Konstanten a, b, r des Ausgangskreises unabhängig; ferner lehrt aber die analytische Geometrie, daß wegen der ersten Gleichung zwei nach den Punkten $\xi : \eta : 0$ und $\xi' : \eta' : 0$ gehende Geraden auf einander senkrecht stehen, so daß wir wirklich den oben ausgesprochenen Satz wieder erhalten haben.

Ganz analoger gilt auch für die Kugeln des Raumes. Sie alle legen auf der unendlichferneen Ebene ein und dieselbe, die sog. absolute Polarenverwandtschaft fest, die durch die Gleichungen

$$\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = 0, \quad \tau = 0, \quad \tau' = 0$$

gegeben ist; da die erste Gleichung aussagt, daß die Richtungen $\xi : \eta : \zeta$ und $\xi' : \eta' : \zeta'$ aufeinander senkrecht stehen, so entspricht dabei jedem unendlichferneen Punkte P diejenige unendlichferne Gerade, die von einer auf der nach P weisenden Richtung senkrechten Ebene ausgeschnitten wird. Damit haben wir ein reeller geometrisches Aequivalent der Sätze über den imaginären Ku-

geltbreis.

Man kann freilich sagen, daß in diesen ganzen Betrachtungen das Imaginäre mehr umgangen als gedeutet ist. Eine wirkliche Interpretation einzelner imaginärer Punkte, Geraden und Ebenen hat aber v. Staudt in seinen „Beiträgen" von 1856/60 durch Weiterbildung jener Ansätze gegeben. Ich will auch das hier auseinandersetzen, weil es im Grunde höchst einfach und sinnreich ist, und nur in der abstrakten Darstellung Staudts äußerst fremdartig und schwierig erscheint. Dabei schließe ich mich durchaus der analytischen Darstellung an, wie sie Stolz 1871 [1]) gegeben hat. Stolz, der damals mit mir zusammen in Göttingen war, hatte Staudt gelesen, was ich selbst nie fertig gebracht habe; von ihm lernte ich dann im persönlichen Verkehr die verschiedenen auch sonst so interessanten Staudtschen Ansätze kennen, über die ich späterhin vielfach gearbeitet habe. Ich möchte im folgenden vor allem wieder die hauptsächlichen Punkte des Gedankenganges hervortreten lassen, ohne alle Einzelheiten vollständig auszuführen; dabei wird es vollkommen genügen, wenn ich mich auf die Ebene beschränke.

---

1) „Die geometrische Bedeutung der komplexen Elemente in der analytischen Geometrie". Math. Annal. Bd. 4, pg. 416.

Es sei also zunächst einmal irgend ein imaginärer Punkt P, d. h. seine drei komplexen Koordinaten ξ, η, τ gegeben; es sei, in reellen und imaginären Bestandteil getrennt:

$$(1) \qquad \xi = \xi_1 + i\xi_2, \quad \eta = \eta_1 + i\eta_2, \quad \tau = \tau_1 + i\tau_2 .$$

Wir wollen nun eine reelle Raumfigur konstruieren, durch die dieser Punkt P seine Deutung findet, und zwar soll der Zusammenhang ein projektiver sein, d. h. genauer gesagt, er soll durch beliebige reelle projektive Umformungen nicht geändert werden. Der erste Schritt dazu ist, daß wir

1) die beiden reellen Punkte P_1, P_2 auffassen, deren homogene Koordinaten die 3 reellen bezw. die mit i multiplizierten Bestandteile der gegebenen Koordinaten von P sind:

$$(1^{a}) \qquad P_1 : \xi_1, \eta_1, \tau_1 \quad ; \quad P_2 : \xi_2, \eta_2, \tau_2 .$$

Diese beiden Punkte sind wesentlich verschieden, d. h. es ist nicht $\xi_1 : \eta_1 : \tau_1 = \xi_2 : \eta_2 : \tau_2$, da sonst $\xi : \eta : \tau$ sich wie drei reelle Größen verhalten und daher einen reellen Punkt darstellen würden. Daher bestimmen P_1, P_2 eine reelle Gerade g, deren Gleichung bekanntlich

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} \xi & \eta & \tau \\ \xi_1 & \eta_1 & \tau_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \tau_2 \end{vmatrix} = 0$$

ist; auf dieser liegen sowohl der gegebene imaginäre Punkt P, als auch sein „konjugiert imaginärer Punkt" $\bar{P}$ mit den Koordinaten

$$(1) \qquad \bar{\xi} = \xi_1 - i\xi_2 , \quad \bar{y} = y_1 - i y_2 , \quad \bar{\tau} = \tau_1 - i\tau_2 ,$$

denn beide Koordinatentripel (1), (1.) genügen der Geradengleichung (2).

2.) Natürlich wird das so konstruierte Punktepaar P_1, P_2 keineswegs als reeller Repraesentant des imaginären Punktes P gelten können, denn es hängt ganz wesentlich von den Einzelwerten von ξ, y, τ selbst ab, während der Punkt P nur von deren Verhältnissen abhängt. Es wird also genau derselbe Punkt P dargestellt, wenn wir statt ξ, y, τ ihre Produkte mit einer beliebigen komplexen Konstanten

$$\rho = \rho_1 + i\rho_2$$

schreiben:

$$(3) \qquad \begin{cases} \rho\xi = \rho_1\xi_1 - \rho_2\xi_2 + i(\rho_2\xi_1 + \rho_1\xi_2), \\ \rho y = \rho_1 y_1 - \rho_2 y_2 + i(\rho_2 y_1 + \rho_1 y_2), \\ \rho\tau = \rho_1\tau_1 - \rho_2\tau_2 + i(\rho_2\tau_1 + \rho_1\tau_2) ; \end{cases}$$

dann erhalten wir aber, indem wir wieder reellen und imaginären Teil trennen, statt der Punkte P_1 und P_2 andere reelle Punkte P_1' und P_2' mit den Koordinaten:

$$(3a) \qquad \begin{cases} P_1': & \xi_1' : y_1' : \tau_1' = \rho_1\xi_1 - \rho_2\xi_2 : \rho_1 y_1 - \rho_2 y_2 : \rho_1\tau_1 - \rho_2\tau_2 , \\ P_2': & \xi_2' : y_2' : \tau_2' = \rho_2\xi_1 + \rho_1\xi_2 : \rho_2 y_1 + \rho_1 y_2 : \rho_2\tau_1 + \rho_1\tau_2 . \end{cases}$$

3.) Versuchen wir nun, diese Punkte zu P_1 und P_2 in Beziehung zu setzen, so erkennen wir zunächst, daß sie jedenfalls, was auch ϱ sei, auf der Geraden $P_1 P_2$ liegen, da ihre Koordinaten stets offenbar die Gleichung (2) befriedigen. Lassen wir weiter ϱ alle Komplexen, d.h. ϱ_1 und ϱ_2 alle reellen Werte durchlaufen (wobei es auf einen gemeinsamen reellen Faktor nicht wesentlich ankommt), so durchläuft P_1' alle reellen Punkte von g und P_2' stellt jedesmal einen ihm eindeutig zugeordneten zweiten reellen Punkt von g dar, so entstehen z. B. (für $\varrho_1 = 1$, $\varrho_2 = 0$) P_1 und P_2 als zugeordnete Punkte. Die Zuordnung wird übersichtlicher, wenn wir das Verhältnis

$$\frac{\varrho_2}{\varrho_1} = -\lambda$$

einführen; denn dann wird

$$(32) \quad \begin{cases} \text{für } P_1': & \xi_1' : \eta_1' : \tau_1' = \xi_1 + \lambda \xi_2 : \eta_1 + \lambda \eta_2 : \tau_1 + \lambda \tau_2 ; \\ \text{für } P_2': & \xi_2' : \eta_2' : \tau_2' = \xi_1 - \frac{1}{\lambda} \xi_2 : \eta_1 - \frac{1}{\lambda} \eta_2 : \tau_1 - \frac{1}{\lambda} \tau_2 . \end{cases}$$

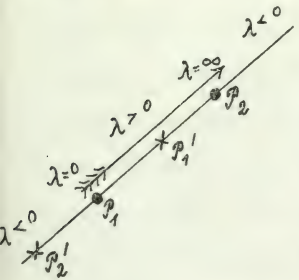
4.) Aus diesen Formeln kann man nun leicht folgern, daß bei variablem λ die Punkte P_1 und P_2 gerade die sämtlichen Punktepaare einer Involution auf der Geraden g durchlaufen; man braucht nur zu beachten, daß die Parameter $\lambda_1 = \lambda$ und $\lambda_2 = -\frac{1}{\lambda}$, mit denen die Koordinaten von P_1' und P_2' aus denen von P_1 und P_2 komponiert

sind, in der symmetrischen bilinearen Relation $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$ stehen. Diese Involution ist aber allein durch den Punkt P, d.h. bereits durch die 2 Verhältnisse der 3 Komplexen Größen ξ, η, τ bestimmt, denn wir haben ja von vornherein den willkürlichen komplexen Faktor ϱ zugelassen; ferner hängt sie mit P projektiv zusammen, denn wenn man ξ, η, τ irgendwie reell linear substituiert, so erleiden offenbar ξ_1', η_1', τ_1' sowohl als ξ_2', η_2', τ_2' dieselben Substitutionen.

5.) Die Grundpunkte d.h. die sich selbst entsprechenden Punkte dieser Involution erhalten wir für $\lambda = -\frac{1}{\lambda}$, also für $\lambda = \pm i$; sie sind also beide imaginär, und zwar sind es gerade der Punkt P, von dem wir ausgingen, und sein konjugiert imaginärer $\bar{P}$. Was wir bisher erreicht haben, ist eigentlich nichts als eine neue Darstellung des früher bereits entwickelten Standtschen Ansatzes: Wir haben ausser P den Punkt $\bar{P}$ in Betracht gezogen, der P zu einem durch eine reelle quadratische Gleichung bestimmten eindimensionalen Gebilde 2. Grades ergänzt, und haben dann als reellen Repräsentanten die zugehörige Involution konstruiert. Was nun noch wesentliches zur vollen Lösung unserer Aufgabe fehlt, und was v. Standt durch eine sehr feine Idee erst 1856 gefunden hat, das ist ein Mittel, um

diesen gemeinsamen Repräsentanten von P und $\bar{P}$ in einen Repräsentanten von P allein (oder von $\bar{P}$ allein) zu verwandeln. Bevor ich darauf eingehe, bemerke ich noch, daß eine Involution bestimmt ist, wenn man zwei ihrer Punktepaare, etwa P_1, P_2 und P_1', P_2' kennt; damit diese Involution imaginäre Grundpunkte hat, ist notwendig und hinreichend, daß sich diese Punktepaare „in verschränkter Lage" befinden, d. h. daß einer der Punkte P_3, P_4 zwischen P_1 und P_2, der andere außerhalb von ihnen liegt.

6) Um nun das gewünschte Unterscheidungsmittel zu erhalten, bemerken wir folgendes: Unser Punkt P_1' mit den Koordinaten $\xi_1 + \lambda\xi_2 : \eta_1 + \lambda\eta_2 : \tau_1 + \lambda\tau_2$ durchläuft die Gerade g in einer ganz bestimmten Richtung, wenn wir λ von 0 durch positive reelle Werte nach $+\infty$ und dann wieder durch negative zurück nach 0 laufen lassen. Man überzeugt sich leicht, daß man auf genau denselben Sinn auf g geführt würde, wenn man von den mit einem beliebigen ϱ multiplizierten Koordinaten von P ausginge, d. h. den Punkt $\xi_1' + \lambda\xi_2'$ etc. betrachtete, und daß ferner auch bei reellen projektiven Umformungen diese Zuordnung erhalten bleibt. Wir treffen daher eine eindeutige unserem



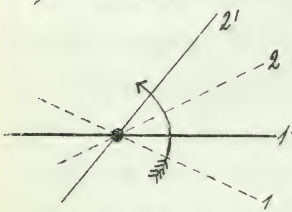
Anforderungen genügende Fortsetzung, wenn wir eine für alle Male dem ursprünglichen Punkte P mit den Koordinaten $\xi_1 + i\xi_2$ et. c. diese Pfeilrichtung zuordnen. Da der konjugiert imaginäre Punkt $\bar{P}$ die Koordinaten $\xi_1 + i(-\xi_2)$ et. c. hat, so ist ihm auf Grund dieser Verabredung der Bewegungssinn des Punktes $\xi_1 + \lambda(-\xi_2)$ et. c. bei positiv wachsendem λ, also tatsächlich gerade der entgegengesetzte Sinn der Geraden g zuzuordnen, und damit ist die gewünschte Unterscheidung erreicht: Wir unterscheiden eben, kurz gesagt, einfach zwischen $+i$ und $-i$, indem wir zwischen der positiven und der negativen Durchlaufung der reellen λ-Werte unterscheiden.

Damit haben wir schließlich, um es zu resumieren, folgende Regel für die eindeutige und projektiv invariante Bildung einer dem imaginären Punkt mit den Koordinaten $\xi_1 + i\xi_2$, $\eta_1 + i\eta_2$, $\tau_1 + i\tau_2$ repräsentierenden reellen geometrischen Figur gewonnen: Man konstruiere die Punkte $P_1(\xi_1 : \eta_1 : \tau_1)$ und $P_2(\xi_2 : \eta_2 : \tau_2)$, die Gerade g durch sie, und diejenige Punktinvolution auf g (bezw. noch ein weiteres ihrer Punktepaare), in der immer die Punkte $P_1(\xi_1 + \lambda\xi_2 : \eta_1 + \lambda\eta_2 : \tau_1 + \lambda\tau_2)$ und $P_2'(\xi_1 - \frac{1}{\lambda}\xi_2 : \eta_1 - \frac{1}{\lambda}\eta_2 : \tau_1 - \frac{1}{\lambda}\tau_2)$ gepaart sind, und füge endlich den Pfeil bei, der der Bewegungsrichtung von P_1' bei posi-

für wachsendem λ entspricht.

Es bleibt nun nur noch zu überlegen, dass auch umgekehrt jede solche reelle Figur bestehend aus einer Geraden, 2 Punktepaaren P_1, P_2 und P_1', P_2' in verschränkter Lage (bezw. einer Punktinvolution ohne reelle Doppelpunkte) auf ihr, sowie einer Pfeilrichtung einen und nur einen imaginären Punkt repräsentiert. Zu der Tat kann man leicht – ich brauche wohl auch das hier nicht im einzelnen auszuführen – durch Hinzufügung einer passenden reellen Konstanten Faktoren den Koordinaten von P_2 solche Werte ξ_2, η_2, τ_2 erteilen, dass die Koordinaten von P_1' und P_2' proportional $\xi_1 + \lambda\xi_2 : \eta_1 + \lambda\eta_2 : \tau_1 + \lambda\tau_2$ und $\xi_1 - \frac{1}{\lambda}\xi_2 : \eta_1 - \frac{1}{\lambda}\eta_2 : \tau_1 - \frac{1}{\lambda}\tau_2$ sind oder, was dasselbe ist, dass die Doppelpunkte der gegebenen Involution die Koordinaten $\xi_1 \pm i\xi_2$ etc. haben, über das Vorzeichen von λ, das dabei noch willkürlich ist, verfüge man so, dass die Bewegungsrichtung des Punktes $\xi_1 + \lambda\xi_2 : \eta_1 + \lambda\eta_2 : \tau_1 + \lambda\tau_2$ bei von 0 aus positiv wachsendem λ dem Sinne des gegebenen Pfeiles entspricht. Dann sind $\xi_1 + i\xi_2 : \eta_1 + i\eta_2 : \tau_1 + i\tau_2$ die Koordinaten des dargestellten Punktes, und diese Verhältnisse sind offenbar eindeutig bestimmt, gleichgültig von welchem Involutionspaaren man ausgeht.

Nachdem wir so unser Problem für den Punkt erledigt haben, können wir die Lösung nach dem Prinzip der Dualität sofort auch auf die Gerade übertragen.



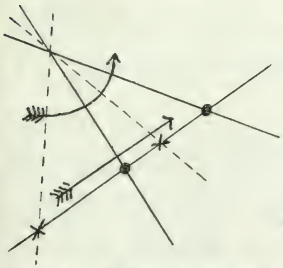
Danach wird also eine komplexe Gerade reell eindeutig repräsentiert werden durch einen reellen Punkt mit seinem Strahlbüschel, zwei Strahlenpaare desselben in verschränkter Lage (bezw. eine Strahleninvolution ohne reelle Doppelstrahlen) sowie endlich einen bestimmten Umlaufssinn im Büschel.

Diese Darstellungen gestatten es nun, und darin liegt ihr grosser Wert, auch alle Beziehungen zwischen komplexen Elementen oder zwischen komplexen und reellen Elementen durch greifbare Eigenschaften durchaus reeller geometrischer Figuren darzustellen. Um das an einem konkreten Beispiele deutlicher zu machen, will ich Ihnen darlegen, was es in dieser Repräsentation heisst, dass ein (reeller oder komplexer) Punkt P auf einer (reellen oder komplexen) Geraden g liegt. Wir haben da natürlich 4 Fälle zu unterscheiden:

1) reeller Punkt und reelle Gerade;
2) reeller Punkt und imaginäre Gerade;
3) imaginärer Punkt und reelle Gerade;

4.) imaginärer Punkt und imaginäre Gerade.

Der erste Fall bedarf keiner besonderen Erläuterung; hier haben wir die Grundbeziehung aller reellen Geometrie vor uns. – Im Falle 2.) muß durch den gegebenen reellen Punkt neben der gegebenen imaginären Geraden offenbar auch die konjugiert imaginäre gehen, und daher muß er mit dem Scheitel des Strahlenbüschels identisch sein, das wir zur Darstellung der imaginären Geraden benutzen. Ebenso muß im Falle 3.) die reelle Gerade identisch mit dem Träger der geradlinigen Punktinvolution sein, die den gegebenen imaginären Punkt repräsentiert. – Am interessantesten ist der vierte Fall; bei ihm muß offenbar der konjugiert imaginäre Punkt auch auf der konjugiert imaginären Geraden liegen, und daraus folgt leicht, daß jedes Punktepaar der darstellenden Punktinvolution auf einem Strahlenpaar der g repräsentierenden Geradeninvolution liegen muß, d. h. diese beiden repräsentierenden Involutionen müssen perspektiv zu einander liegen, und überdies folgt noch, daß die Pfeile der beiden Involutionen gleichfalls perspektiv liegen.



In dieser Weise bekommt man überhaupt das vol-

le Abbild der allgemeinen analytischen Geometrie der Ebene mit komplexen Koordinaten, wenn man der Gesamtheit der reellen Punkte und Geraden der Ebene die Gesamtheit der in Rede stehenden Involutionsfiguren mit Pfeilbezeichnung als neue Elemente adjungiert. Es mag hier genügen, wenn ich nur in groben Umrissen andeute, wie sich der Aufbau dieses reellen Bildes der komplexen Geometrie gestalten würde. Ich folge dabei derjenigen Anordnung, in der man die ersten Sätze der elementaren Geometrie jetzt gewöhnlich darzustellen pflegt. Man beginnt da

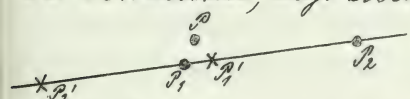
1.) mit den Existenzsätzen, die die Existenz der soeben angedeuteten Elemente eines gegen die gewöhnliche Geometrie erweiterten Bereiches genau zu umschreiben hätten.

2.) Hierauf folgen die Sätze der Verknüpfung, die aussagen, daß auch in dem in 1.) definierten erweiterten Bereiche durch 2 Punkte genau 1 Gerade geht, und daß 2 Gerade genau einen Punkt gemein haben. Man hat dabei je nach der Realität der gegebenen Elemente jedesmal 4 Fälle zu unterscheiden, und es ist sehr amüsant sich genau durchzuüberlegen, wie man alle jene Beziehungen durch ganz reelle Konstruktionen mit Punkt- und Geradeninvo-

Inhomen vollständig realisieren kann.

3.) Was nun die Gesetze der Anordnung angeht, so treten hier gegenüber den reellen Verhältnissen völlig neue Umstände auf; insbesondere bilden die sämtlichen reellen und komplexen Strahlen durch einen festen Punkt je ein zweidimensionales Kontinuum. Jedermann ist ja auch von der Funktionentheorie her gewohnt, die Gesamtheit der Werte einer komplexen Variablen durch die sämtlichen Punkte einer Ebene darzustellen.

4. Von den Sätzen der Stetigkeit endlich will ich hier nur hervorheben, wie sich die in beliebiger Nähe eines reellen Punktes liegenden komplexen Punkte repräsentieren werden. Man hat dazu durch den reellen Punkt P (oder durch einen reellen Nachbarpunkt) eine reelle Gerade zu legen und auf dieser zwei solche Punktepaare P_1 P_2 und P_1' P_2' in verschränkter Lage zu betrachten, daß zwei Punkte P_1, P_1' verschiedener



Paare nahe aneinander und an P liegen; läßt man nun P_1 und P_1' zusammenrücken, so ordnet die durch jene Paare bestimmte Involution aus, d. h. ihre beiden vorher komplexen Doppelpunkte fallen mit $P_1 = P_1'$ zusammen. Jeder der beiden durch die Involution (mit dem einen oder anderen Pfeile) dargestellten ima-

gewöhnlichen Punkte geht also stetig in einen Punkt in der Nähe von P oder in P selbst über. Man muß sich in diese Stetigkeitsvorstellungen natürlich erst besonders hineinarbeiten, um sie mit Nutzen gebrauchen zu können.

Ist dieser ganze Aufbau auch, verglichen mit der gewöhnlichen reellen Geometrie, recht umständlich und beschwerlich, so kann er dafür doch auch unvergleichlich viel mehr leisten; insbesondere kann er algebraische Gebilde als Gesamtheit ihrer reellen und komplexen Elemente zu voller geometrischer Anschaulichkeit erheben, und man kann mit ihm an den Figuren selbst Sätze wie den Fundamentalsatz der Algebra oder das Bezoutsche Theorem, daß 2 Kurven m^ter und n^ter Ordnung im allgemeinen gerade m.n Komplexe Punkte gemein haben, sich anschaulich deutlich machen. Zu diesem Ziele müßte man die Ansätze freilich viel genauer anschaulich durcharbeiten, als das bisher wohl geschehen ist, obwohl sich alles wesentliche Material bereits in der Literatur findet.

In den meisten Fällen dürfte allerdings die Anwendung dieser geometrischen Deutung bei allen ihren theoretischen Vorzügen doch solche Komplikationen

mit sich bringen, daß man sich mit ihrer prinzipiellen Möglichkeit zufrieden geben und sich tatsächlich auf den mehr naiven Standpunkt zurückziehen wird: ein Komplexer Punkt ist der Inbegriff imaginärer Koordinatenwerte, mit dem man in gewisser Weise ebenso operieren kann, wie mit reellen Punkten. Tatsächlich hat sich diese von allen prinzipiellen Erörterungen absehende Heranziehung imaginärer Elemente namentlich immer dann als fruchtbar erwiesen, wenn man mit den imaginären Kreispunkten und dem Kugelkreise zu tun hatte. Zuerst hat, wie schon gesagt, Poncelet das Imaginäre in diesem Sinne benutzt; ihm sind andere französische Geometer, so namentlich Chasles und von jetzt lebenden Darboux, dann nachgefolgt; in Deutschland hat besonders Lie von dieser Auffassung des Imaginären mit großem Erfolge Gebrauch gemacht.

Mit diesem Exkurs über das Imaginäre schließe ich auch gleichzeitig den ganzen 2. Hauptteil dieser Vorlesung, und wende mich einem neuen Abschnitt zu:

Dritter Hauptteil:
Systematik und Grundlegung der Geometrie.

I. Die Systematik.

Wir benutzen zunächst die Kenntnis der geome-

bischen Transformationen, die wir uns im vorigen Hauptteil angeeignet haben, um uns einen

1. Ueberblick über die Gliederung der Geometrie

zu verschaffen. Es handelt sich hier um Betrachtungen, wie ich sie systematisch in meinem Erlanger Programm [1] von 1872 entwickelt habe; über die Weiterbildung dieser Ideen seit dieser Zeit finden Sie in dem Encyklopädiereferat von Fano: „Die Gruppentheorie als geometrisches Einteilungsprinzip" (Enc. III A.B. 4b.) Auskunft.

1) Wir hatten stets, und tun dies auch weiterhin, zur Behandlung der geometrischen Verhältnisse uns konsequent der Analysis bedient, indem wir die Gesamtheit der Raumpunkte durch die Gesamtheit der Wertetripel der 3 „Koordinaten" x, y, z repräsentiert dachten. Jeder Transformation des Raumes entsprach dann eine gewisse Transformation dieser Koordinaten; gleich von Beginn unserer Erörterungen an waren uns 4 Arten von Transformationen als besonders bedeutsam entgegengetreten, die durch gewisse spezielle lineare Transformationen von x, y, z dargestellt werden: Parallelverschiebungen, Drehungen um den Koordina-

1) „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen". Erlangen 1872. Abgedruckt Mathem. Annalen 43 (1893) pag. 63 f.f.

Anfangspunkt O, Spiegelungen an O, Ähnlichkeitstransformationen von O aus.

2.) Es besteht aber keineswegs, wie man nach der Einführung von Koordinaten zunächst vielleicht annehmen könnte, vollständige Identität zwischen der Analysis dreier unabhängigen Veränderlichen x, y, z und der Geometrie im spezifischen Sinne. Vielmehr handelt, wie ich das ja auch früher schon gelegentlich hervorhob (vgl. S. 304), die Geometrie nur von solchen Beziehungen zwischen den Koordinaten, die bei den unter 1) aufgeführten Arten linearer Substitutionen ungeändert bleiben - mag man diese nun als Veränderungen des Koordinatensystems oder als Transformationen des Raumes auffassen; die Geometrie ist also die Invariantentheorie jener linearen Substitutionen. Alle nichtinvarianten Gleichungen zwischen Koordinaten hingegen, z. B. die Aussage, daß ein Punkt die Koordinaten 2, 5, 3 hat, beziehen sich nur auf ein bestimmtes ein für alle Mal festes Koordinatensystem, und gehören einer Wissenschaft an, die jeden Punkt für sich individualisiert und seine Eigenschaften gesondert auffaßt: der Topographie oder - wenn man will - Geographie. Zur näheren Erläuterung will ich noch an einige Beispiele geometrischer Eigenschaften erinnern: Zwei Punkte haben eine bestimmte

Entfernung, wenn nur einmal eine Einheit festgelegt ist; das bedeutet in der gegenwärtigen Auffassung, daß man aus ihren Koordinaten x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 einen Ausdruck $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$ aufbauen kann, der bei allen jenen Substitutionen ungeändert bleibt oder sich doch nur mit einem von der speziellen Lage der Punkte unabhängigen Faktor multipliziert. Aehnliche Bedeutung haben die Aussagen, daß 2 Gerade einen bestimmten Winkel bilden, daß ein Kegelschnitt bestimmte Hauptachsen und Brennpunkte hat etc.

Die Gesamtheit dieser geometrischen Eigenschaften, also die ganze Geometrie, werden wir auch als „metrische Geometrie" bezeichnen, um von ihr sogleich verschiedene andere „Arten von Geometrieen" zu unterscheiden. Wir werden diese gewinnen, indem wir nach einem bestimmten Prinzip gewisse Gruppen von Sätzen der metrischen Geometrie aussondern und für sich betrachten; demnach sind alle diese neuen Arten von Geometrie wenigstens für die nächstliegende Auffassung in der metrischen Geometrie als der umfassendsten als Teile enthalten.

3.) Wir fassen nämlich zunächst die früher ausführlich studierten affinen Transformationen, d. h. alle ganzen linearen Substitutionen der x, y, z:

$$\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 \\ z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 \end{cases}$$

ins Auge, in denen die unter 1.) betrachteten Transformationen als spezielle Fälle enthalten sind, und heben aus der Gesamtheit der geometrischen Begriffe und Theoreme den engeren Kreis derjenigen hervor, die bei beliebigen affinen Transformationen ungeändert bleiben; ihren Inbegriff betrachten wir als die erste neue Art Geometrie, die sog. affine Geometrie, oder Invariantentheorie der affinen Transformationen.

Aus unserer Kenntnis der affinen Transformationen können wir sofort entnehmen, was es in dieser Geometrie an Begriffen und Sätzen noch geben wird; ich erinnere hier nur an einiges weniges: Von Entfernung und Winkel wird in der affinen Geometrie nicht mehr die Rede sein können, ebenso wird der Begriff der Hauptachsen eines Kegelschnittes oder der Unterschied zwischen Kreis und Ellipse verwischt. Erhalten aber bleibt das Unendlichweite des Raumes und alles, was sich darauf bezieht: der Begriff des Parallelismus zweier Geraden, die Einteilung aller Kegelschnitte in Ellipsen, Hyperbeln, Parabeln und dgl.; ferner der Begriff der Durchmesser eines Kegel-

schnitten und speziell die Bezeichnung konjugierter Durchmesser.

4) Weiter ziehen wir die projektiven Umformungen, d. h. die gebrochenen linearen Transformationen:

$$x' = (a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1) : (a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4)$$
$$y' = (a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2) : (a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4)$$
$$z' = (a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3) : (a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4)$$

heran. Ihre Invariantentheorie, das heißt den Teil der Begriffe und Sätze der affinen Geometrie, der bei dem so abermals erweiterten Transformationenkreis immer noch ungeändert bleibt, nennen wir projektive Geometrie. Wir können die allmähliche Aussonderung der affinen und projektiven Geometrie aus der metrischen dem Vorgehen des Chemikers vergleichen, der aus einem Stoff durch Anwendung immer stärkerer Zersetzungsmittel immer wertvollere Bestandteile isoliert; als solche Zersetzungsmittel dienen uns erst die affinen, dann die projektiven Transformationen.

Was die Sätze der projektiven Geometrie angeht, so sei nur hervorgehoben, daß nunmehr die ausgezeichnete Stellung des Unendlichweiten und alle die damit zusammenhängenden Begriffe der affinen Geometrie in Fortfall kommen. Es gibt nur

noch eine Art von Kegelschnitt; es bleibt aber beispielsweise erhalten die Beziehung zwischen Pol und Polare und ebenso die Erzeugung der Kegelschnitte durch projektive Strahlenbüschel, von der wir früher sprachen.

Wir können nun aber nach demselben Prinzip von der metrischen Geometrie auch zu anderen Arten von Geometrieen aufsteigen; eine der wichtigsten ist

4.) die Geometrie der reziproken Radien, die die Gesamtheit derjenigen Theoreme der metrischen Geometrie, umfaßt, welche bei allen möglichen Transformationen durch reziproke Radien erhalten bleiben; es hat also z. B. der Begriff der Gerade oder Ebene keine selbständige Bedeutung mehr, sondern er wird dem Begriff Kreis oder Kugel eingeordnet.

5.) Endlich hebe ich noch eine Art von Geometrie hervor, die durch das schärfste Abstraktionsmittel gewonnen ist und gewissermaßen die wenigsten Theoreme umfaßt: die Analysis situs, die ich ja schon früher (S. 219) erwähnte. Hier handelt es sich um die Gesamtheit der Eigenschaften, die allen eineindeutigen, nur durchaus stetigen Transformationen gegenüber erhalten bleiben; um dem Unendlichvielerlei, das die so definierten Transformationen stets in sich überführen würden, keine ausgezeichnete Stel-

lung einzuräumen, können wir noch entweder die projektiven Transformationen oder die Transformationen durch reziproke Radien hinzunehmen.

Dieses allgemeine Schema werden wir jetzt noch schärfer umschreiben, indem wir den fundamentalen Begriff der Gruppe einführen. Wir nennen einen Inbegriff von Transformationen dann eine Gruppe, wenn 2 Transformationen aus ihm hintereinander vorgenommen wieder eine Transformation des Inbegriffs ergeben. Beispiele von Gruppen sind der Inbegriff der Bewegungen, oder derjenige der Kollineationen (projektiven Transformationen), d. h. 2 Bewegungen setzen sich wieder zu einer Bewegung, 2 Kollineationen wieder zu einer Kollineation zusammen. Das ist geometrisch evident oder kann auch analytisch leicht bestätigt werden.

Die Gesamtheit der bei der metrischen Geometrie in Betracht kommenden Substitutionen bildet nun gleichfalls eine Gruppe, die wir als Hauptgruppe der räumlichen Aenderungen bezeichnen; sie umfaßt Verschiebungen, Drehungen, Spiegelungen, Aehnlichkeitstransformationen. Ebenso liegen, wie man leicht einsieht, bei den weiter in Betracht gezogenen Arten von Geometrie stets auch Gruppen von Transformationen zu Grunde, die wir bezüglich

als affine Gruppe, projektive Gruppe, Gruppe der reziproken Radien, Gruppe aller stetigen Verzerrungen bezeichnen.

Wir wollen uns nun noch überlegen, von wievielen unabhängigen Parametern die einzelne Operation in jeder einzelnen dieser Gruppen abhängt. In der Hauptgruppe sind die Bewegungen mit 6 Parametern enthalten, und dazu kommt noch ein Parameter für die Maßstabänderung, so daß im ganzen 7 Parameter vorhanden sind; wir drücken dies aus, indem wir die Hauptgruppe als eine G_7 bezeichnen. Die Gleichungen der allgemeinen affinen Transformation enthalten $3 \cdot 4 = 12$ willkürliche Koeffizienten, die der projektiven $4 \cdot 4 = 16$, wobei aber bei den letzteren ein allen gemeinsamer Faktor unwesentlich ist; also ist die affine Gruppe eine G_{12}, die projektive eine G_{15}. Endlich erkennt man, daß die Gruppe der reziproken Radien eine G_{10} ist und daß schließlich die Gruppe aller stetigen Verzerrungen überhaupt keine endliche Parameterzahl hat, sondern ihre Operationen noch von willkürlichen Funktionen abhängen (sie ist eine G_∞).

Nun können wir mit Hilfe dieser Begriffe aus dem obigen Schema ein allgemeines Prinzip ablösen, das eben der Hauptgedanke meines Erlanger Programmes ist: Wir denken uns irgend eine Gruppe von

räumlichen Transformationen, welche die Hauptgruppe als Teil umfaßt; dann ist die Invariantentheorie dieser Gruppe eine bestimmte Art von Geometrie und man erhält so jede Art von Geometrie.

Dies Prinzip ist in der Literatur vollständig durchgeführt nur für die oben zuerst aufgeführten 3 Fälle, und mit ihnen als den wichtigsten oder bekanntesten wollen wir uns zunächst etwas näher beschäftigen.

Wir stellen dabei umgekehrt wie oben, an die Spitze die G_{15} aller projektiven Transformationen, die wir homogen schreiben:

$$\begin{aligned}
\rho' \xi' &= a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta + d_1 \tau \\
\rho' \eta' &= a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \zeta + d_2 \tau \\
\rho' \zeta' &= a_3 \xi + b_3 \eta + c_3 \zeta + d_3 \tau \\
\rho' \tau' &= a_4 \xi + b_4 \eta + c_4 \zeta + d_4 \tau .
\end{aligned}$$

Daraus wird eine affine Transformation, wenn die unendlichferne Ebene in sich übergeht, d. h. wenn für $\tau = 0$ stets $\tau' = 0$ wird; das besagt aber $a_4 = b_4 = c_4 = 0$, und indem wir die ersten 3 Gleichungen durch die letzte dividieren und zu inhomogenen Koordinaten übergehen, erhalten wir tatsächlich die alten Formeln:

$$\begin{aligned}
x' &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 \\
y' &= a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 \\
z' &= a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 .
\end{aligned}$$

Der ursprünglich auftretende Nenner d_4 ist dabei als unwesentlich unterdrückt, d. h. die Quotienten $\frac{a_1}{a_4}$ ... einfach durch a_1 ... ersetzt. Die Parameterzahl ist so durch Festhaltung der unendlichen Ebene tatsächlich von 15 auf 12 reduziert.

Wollen wir nun auf die Hauptgruppe G_7 zurückgehen, so haben wir noch die Bedingung hinzuzufügen, daß außer der unendlichferneren Ebene auch ihr imaginärer Kugelkreis in sich transformiert wird, d. h. es soll

$$\text{für } \left\{\begin{matrix} \tau = 0 \\ \xi^2+\eta^2+\zeta^2 = 0 \end{matrix}\right\} \text{ auch stets } \left\{\begin{matrix} \tau' = 0 \\ \xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2 = 0 \end{matrix}\right.$$

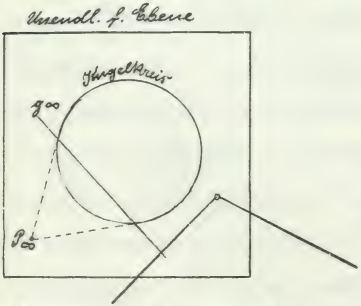
sein. Da ein Kegelschnitt in einer festen Ebene von 5 Konstanten abhängt, so ergibt diese Vorschrift für den dem Kugelkreis entsprechenden an sich beliebigen Kegelschnitt gerade 5 Bedingungen für die 12 Konstanten der Affinität, so daß tatsächlich durch Festhaltung des Kugelkreises die $12 - 5 = 7$ Parameter der G_7 übrig bleiben.

Ich habe nun an diese Aufzählung eine sehr wichtige Gedankenwendung anzuschließen, die zuerst 1859 von dem großen englischen Geometer Cayley ausgesprochen wurde[1]. Wenn es auch anfänglich scheint, als ob die affine und projektive Geometrie ärmere aus-

1) In „A sixth memoir upon quantics." Phil. Trans. of the R. S. of London. 1859 = Collected mathem. papers. II (Cambridge 1889). pg. 561 ff.

schnitte der metrischen seien, so läßt sich doch die affine sowohl als die metrische Geometrie der projektiven einordnen, „projective geometry is all geometry." Dieser zunächst paradox erscheinende Zusammenhang entsteht so, daß man den zu untersuchenden Figuren bestimmte Gebilde, nämlich die unendlichferne Ebene und eventuell den Kugelkreis in ihre hinzufügt; dann sind die affinen bezw. metrischen Eigenschaften einer Figur nichts als die projektiven Eigenschaften der so durch Hinzunahme der unendlichfernen Ebene bezw. Kugelkreises erweiterten Figur.

Lassen Sie mich das zunächst an zwei ganz einfachen Beispielen erläutern, wobei ich nur von früher her bekannte Tatsachen in ein wenig modifizierter Form aussprechе. Daß 2 Gerade parallel sind, hat in der projektiven Geometrie zunächst gar keine Bedeutung; nehmen wir aber die unendlichferne Ebene zu den gegebenen Gebilden (den beiden Geraden) hinzu, so ist es (vgl. S. 188) die rein projektive Aussage, daß 2 gegebene Gerade sich auf einer gegebenen Ebene schneiden. Ferner, steht eine Gerade auf einer Ebene senkrecht, so können wir das (vgl.



S. 257) auf eine Polarenbeziehung – das ist ja eine projektive Eigenschaft – der durch Hinzunahme des Kugelkreises erweiterten Figur zurückführen: Der Spurpunkt P_∞ der Geraden und die Spurlinie g_∞ der Ebene in der unendlich-fernen Ebene sollen in Bezug auf den Kugelkreis $\mathfrak{K}$ und Polare sein.

Ich möchte nun diese Gedanken genauer ausführen und zeigen, wie sie ein vollkommen systematisches Lehrgebäude der Geometrie auszuführen gestatten. Das größte Verdienst darum haben sich die Engländer erworben; Cayley habe ich schon genannt, und ich habe ihm noch zur Seite zu stellen Sylvester und Salmon in Dublin; diese Männer haben von 1850 an diejenige algebraische Disziplin geschaffen, welche man im engeren Sinne Invariantentheorie der linearen homogenen Substitutionen [1] nennt, und die unter Voranstellung des Cayleyschen Prinzipes eine volle Systematik der Geometrie auf analytischer Basis ermöglicht. Um diese Systematik völlig zu verstehen, müssen wir hier einen

2. Exkurs über die Invariantentheorie

einschalten. Natürlich werde ich dabei lediglich in Kürze

---

1) Man gebraucht das Wort „Invariantentheorie" auch im weiteren Sinne mit Bezug auf beliebige Transformationsgruppen; im engeren Sinne, wie er auch in der Folge für uns maßgebend ist, hat es Sylvester zuerst angewendet.

Weise referierend die Hauptgedankengänge und Resultate vortragen können, ohne auf Einzelheiten und auf Beweise einzugehen. Was Literatur dieses grossen Gebietes anlangt, so verweise ich vor allem auf den Bericht von W. Fraux Mbeyer: „die Fortschritte der projektiven Invariantentheorie im letzten Vierteljahrhundert" in Bd. I der Jahresberichte der deutschen Mathem. Vereinig. (1892), sowie auf das Encyklopädiereferat „Invariantentheorie" desselben Autors (Enc. Bd. I B, 2). Was man von der Invariantentheorie in der Geometrie braucht, findet man besonders in den Lehrbüchern von G. Salmon, [1] die zur Verbreitung der hier in Betracht kommenden Ideen wohl am meisten beigetragen haben, und die auch in der deutschen Bearbeitung von Fiedler stets ungemein viel benutzt worden sind. In derselben Richtung liegen auch die Vorlesungen von Clebsch [2], die Lindemann herausgegeben hat.

Wenn wir nun zu unserem Gegenstand übergehen, so denken wir uns

1) irgend eine Anzahl von Variablen gegeben, und sprechen je nachdem von binären, ternären, quaternären ...

1, Analytische Geometrie der Kegelschnitte – der höheren ebenen Kurven – des Raumes. Deutsch bearb. v. W. Fiedler. Leipzig (Teubner); jede in vielen Auflagen.

2, Vorlesungen über Geometrie, bearb. von F. Lindemann. Leipzig (Teubner). 1. Aufl. (1871 ff.) 2. Aufl. (1906 ff.)

Gebiet. Indem wir uns vorbehalten diese Variablen schließlich als homogene Koordinaten in einer Geraden, Ebene oder Raum aufzufassen, bezeichnen wir sie in jenen 3 ersten Fällen mit:

$$\xi, \tau\,; \quad \xi, \eta, \tau\,; \quad \xi, \eta, \zeta, \tau\,,$$

wobei wir dann später $\tau = 0$ allemal als Gleichung des unendlichferneren Elementes ansehen werden.

2.) Wir betrachten die Gruppen homogener linearer Substitutionen dieser Variablen, wobei wir aber zunächst nicht bloß, wie es später in der projektiven Geometrie geschieht, die Verhältnisse der Variablen, sondern auch ihre Einzelwerte selbst in Betracht ziehen wollen; wir schreiben diese Substitutionen:

$$\xi' = a_1\xi + d_1\tau \qquad \xi' = a_1\xi + b_1\eta + d_1\tau$$
$$\tau' = a_4\xi + d_4\tau\,; \qquad \eta' = a_2\xi + b_2\eta + d_2\tau\,;$$
$$\tau' = a_3\xi + b_3\eta + d_3\tau$$

$$\xi' = a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta + d_1\tau$$
$$\eta' = a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta + d_2\tau$$
$$\zeta' = a_3\xi + b_3\eta + c_3\zeta + d_3\tau$$
$$\tau' = a_4\xi + b_4\eta + c_4\zeta + d_4\tau\,.$$

Die Parameterzahl dieser 3 Gruppen ist bezw. 4, 9, 16.

Um im folgenden alle Dimensionszahlen zusammenfassen zu können, wollen wir in den Formeln immer nur die Variablen ξ und τ und die auf sie bezüglichen Glieder ausschreiben und dazwischen Punkte setzen; will man dann das binäre Gebiet behandeln, so hat man diese Punkte einfach zu ignorieren, für das ternäre und quaternäre aber hat man sie durch Glieder in η bezw. η und

ξ zu ersetzen, die den ausgeschriebenen Termen analog sind. Wir reden also allgemein von den Variablen

$$\xi, \ldots \tau$$

und von den linearen Substitutionen in ihnen

$$(1). \quad \begin{cases} \xi' = a_1 \xi + \ldots + d_1 \tau \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tau' = a_4 \xi + \ldots + d_4 \tau . \end{cases}$$

3.) Was nun die Objekte der Invariantentheorie angeht, so wollen wir hier 2. Stufen der Fragestellung unterscheiden:

α.) Zunächst seien irgendwelche einzelne Wertsysteme der Variablen

$$\xi_1 \ldots \tau_1 \; ; \quad \xi_2 \ldots \tau_2 \; ; \quad \xi_3 \ldots \tau_3 \text{ et. c.}$$

gegeben, die wir im Anklang an die Geometrie ja wohl schon hier kurzweg als Punkte 1; 2; 3 et. c. bezeichnen dürfen. Jedes dieser Wertsysteme für sich wird den Substitutionen (1) der Gruppe unterworfen, und es handelt sich darum solche Verbindungen unserer Wertsysteme zu bilden, die bei diesen simultanen Substitutionen invariant bleiben.

b.) Die zweite Stufe der Problemstellung zieht neben solchen Punkten auch Funktionen der Variablen heran und zwar in erster Linie ganze rationale Funktionen; man kann sich dabei auf homogene rationale ganze

Funktionen, die die Invariantentheorie Formen nennt, beschränken, da sich wegen der Homogenität der Substitutionen die Terme gleicher Dimension ohnehin für sich substituieren. Wir werden da also zunächst einmal lineare Formen betrachten, die wir mit

$$\varphi = a\xi + \ldots + \delta\tau$$

bezeichnen, ferner quadratische Formen

$$f = A\xi^2 + \ldots + 2G\xi\tau + \ldots + K\tau^2$$

und so fort. Auch mehrere Formen gleicher Dimension werden wir gleichzeitig heranziehen können, und unterscheiden sie dann durch Indices, z. B.

$$\varphi_1 = a_1\xi + \ldots + \delta_1\tau\,;\ \varphi_2 = a_2\xi + \ldots + \delta_2\tau\,;\ \text{et. c.}$$

Auch können wir Formen mit mehreren Variablenreihen, z. B. Bilinearformen

$$f = A\xi_1\xi_2 + \ldots + \Delta\cdot\xi_1\tau_2 + \ldots + N\tau_1\xi_2 + \ldots + \Pi\tau_1\tau_2$$

in Betracht ziehen.

4.) Um das im Anschluß hieran entstehende allgemeine Problem deutlich zu machen, müssen wir zunächst zusehen, wie denn die Koeffizienten dieser Formen sich transformieren, wenn wir die Variablen den Substitutionen der Gruppe (1) unterwerfen. Betrachten wir zunächst die Linearform und setzen

$$\varphi = a\xi + \ldots + \delta\tau = a'\xi' + \ldots + \delta'\tau'\,;$$

führen wir die Ausdrücke (1) von $\xi' \ldots \tau'$ ein, so muß

$$\alpha\xi + \ldots + \sigma\tau = \alpha'(a_1\xi + \ldots + d_1\tau) + \ldots + \sigma'(a_4\xi + \ldots + d_4\tau)$$
$$= (\alpha' a_1 + \ldots + \sigma' a_4)\xi + \ldots + (\alpha' d_1 + \ldots + \sigma' d_4)\tau$$

identisch in $\xi \ldots \tau$ gelten, und daraus folgt

$$(2.) \quad \begin{cases} \alpha = a_1\alpha' + \ldots + a_4\sigma' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sigma = d_1\alpha' + \ldots + d_4\sigma' . \end{cases}$$

Die neuen Koeffizienten $\alpha' \ldots \sigma'$ der Linearform hängen also mit den alten $\alpha \ldots \sigma$ wiederum durch eine lineare Substitution zusammen, die sich in einfacher Weise aus (1) ergibt: man vertausche vertikale und horizontale Reihen des Koeffizientenschemas („transponiere" die Substitution) und vertausche obendrein noch die Stellung der alten (nichtakzentuierten) und der neuen (akzentuierten) Größen. Die so entstehende Substitution nennt man kontragredient zu ursprünglichen (1), und sagt kurz, daß sich die Koeffizienten $\alpha \ldots \sigma$ einer Linearform kontragredient mit den Variablen $\xi \ldots \tau$ substituieren. Die vorhin betrachteten Variablenreihen $\xi_1 \ldots \tau_1$; $\xi_2 \ldots \tau_2$; etc. substituieren sich im Sinne dieser Terminologie kogredient.

Gehen wir nun zur quadratischen Form f über, so müssen wir zunächst überlegen, wie die in sie eingehenden quadratischen Terme $\xi^2, \ldots \xi\tau \ldots \tau^2$ sich bei der linearen Substitution (1) verhalten; wir finden aus (1)

sofort

$$(3.)\quad \begin{cases} \xi'^2 = \alpha_1^2 \xi^2 + \ldots + 2\alpha_1 \delta_1 \xi\tau + \ldots + \delta_1^2 \tau^2 \\ \xi'\tau' = \alpha_1\alpha_2 \xi^2 + \ldots + (\alpha_1\delta_2 + \alpha_2\delta_1)\xi\tau + \ldots + \delta_1\delta_2\tau^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tau'^2 = \alpha_2^2 \xi^2 + \ldots + 2\alpha_2\delta_2 \xi\tau + \ldots + \delta_2^2 \tau^2 \end{cases};$$

unsere quadratischen Formen substituieren sich also selbst linear und homogen. Nun ist f in Bezug auf diese Formen eine lineare Form, und also müssen sich, wie wir durch genaue Wiederholung der vorigen Ueberlegungen erkennen, seine Koeffizienten $A \ldots 2G \ldots K$ linear homogen, und zwar kontragredient zur Substitution (3) der Formen $\xi^2 \ldots \xi\tau \ldots \tau^2$ transformieren; d. h. die Gleichungen zwischen $A \ldots 2G \ldots K$ und $A' \ldots 2G' \ldots K'$ entstehen genau so aus (3) wie die Gleichungen (2) aus (1).

5.) Nun können wir das allgemeine Problem der Invariantentheorie formulieren. Sind irgendwie eine Reihe von Punkten $1, 2 \ldots$ sowie von linearen, quadratischen, event. auch höheren Formen $f_1, f_2 \ldots \varphi_1, \varphi_2 \ldots$ vorgegeben, so versteht man unter einer Invariante eine solche Funktion der Koordinaten $\xi_1 \ldots \tau_1; \xi_2 \ldots \tau_2; \ldots$ und der Koeffizienten $\alpha_1 \ldots \delta_1; \alpha_2 \ldots \delta_2 \ldots A_1 \ldots K_1; A_2 \ldots K_2 \ldots$, die bei den linearen Substitutionen (1) der Variablen und den zugehörigen, soeben bestimmten Substitutionen

der Koeffizientensysteme ungeändert bleibt; es soll die Gesamtheit der überhaupt möglichen Invarianten studiert werden.

Man gebraucht in der Literatur gelegentlich auch die Worte Kovariante und Kontravariante für besondere derjenigen der hier allgemein als Invarianten bezeichneten Gebilde. Treten nämlich in dem invarianten Ausdrucke tatsächlich Variable $\xi_1 \dots x_1, \xi_2 \dots x_2, \dots$ auf, so spricht man von Kovarianten, und treten Koeffizienten von Linearformen $a_1 \dots \delta_1, a_2 \dots \delta_2$ auf, so sagt man Kontravariante; das Wort Invariante reserviert man dann für solche Ausdrücke, die weder solche Koordinaten $\xi_1 \dots$ noch Koeffizienten $a_1 \dots$ enthalten, und lediglich aus den Koeffizienten quadratischer oder höherer Formen zusammengesetzt sind. Für das Hervorheben und die Gegenüberstellung jener beiden Fälle ist die Anwendung auf Geometrie, insbesondere das Prinzip der Dualität maßgebend, das wir hier so ausdrücken mögen: Sind $\xi \dots x$ Punktkoordinaten, so sind $a \dots \delta$ Linien- bezw. Ebenenkoordinaten, und gleichgültig, welches Größensystem man voranstellt und einer linearen Transformation unterwirft, stets wird das andere wegen der Invarianz der linearen Kombination $a\xi + \dots + \delta x$ die kontragrediente Substitution erleiden; es ist also schließlich gleich, welchen

Fall man hervorhebt. – Uebrigens hat jener Unterschied, ob Wertsysteme $f \ldots c$, resp. $a \ldots f$ in den aufzustellenden Ausdrücken vorkommen oder nicht, natürlich keinerlei fundamentale Bedeutung, und wir werden daher im allgemeinen weiterhin nur das Wort Invariante im umfassenden Sinne gebrauchen.

6.) Wir wollen jetzt aber diesen Begriff der Invariante noch anderer Richtung schärfer fassen, um zu einem geordneten Aufbau der Theorie zu gelangen. Wir betrachten als Invarianten fortan zunächst nur rationale Funktionen der Koordinaten und Koeffizienten, die obendrein noch in den Koordinaten jedes einzelnen auftretenden Punktes und den Koeffizienten jeder einzelnen auftretenden Form homogen sein mögen. Jede solche rationale Funktion können wir als Quotienten zweier ganzer rationaler homogener Funktionen darstellen, und diese werden wir nun für sich studieren. Freilich brauchen das keine Invarianten im bisherigen Sinne mehr zu sein, sondern sie können sich bei jeder Substitution noch um einen nur von deren Koeffizienten abhängigen Faktor ändern; denn wenn sich nur Zähler und Nenner um denselben Faktor ändern, bleibt der Quotient doch invariant.

7.) Es zeigt sich nun, daß dieser Faktor nur eine Potenz der Substitutionsdeterminante

$$r = \begin{vmatrix} a_1 \dots d_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_4 \dots d_4 \end{vmatrix}$$

sein kann, und wir können so schließlich daran, solche ganze rationale homogene Funktionen der gegebenen Größenreihen zu betrachten, die sich bei den linearen Substitutionen der Variablen und Koeffizienten, wie wir sie vorhin aufstellten, mit einer Potenz r^λ der Substitutionsdeterminante multiplizieren; man nennt sie relative Invarianten, da sie sich nur unwesentlich ändern und ganz ungeändert bleiben bei allen Substitutionen, für die $r = 1$ ist. Der Exponent λ heißt das Gewicht der Invariante. Im Gegensatz dann nennt man das, was wir bisher Invariante schlechtweg nannten, also relative Invarianten vom Gewicht 0, absolute Invariante; jede absolute Invariante ist also ein Quotient relativer Invarianten.

8.) Damit ist tatsächlich ein Gesichtspunkt zur Systematisierung der Invariantentheorie gewonnen. Man wird damit beginnen, nach den relativen Invarianten niedersten Grades zu fragen, und dann erst zu den höheren aufsteigen. Sind j_1, j_2 zwei solche Invarianten, so ist jedes Produkt von Potenzen $j_1^{\kappa_1} \cdot j_2^{\kappa_2}$ wieder eine relative Invariante; denn erhält j_1 bei der Substitution den Faktor r^{λ_1}, j_2 den Faktor r^{λ_2}, so repro-

duziert sich $j_1 \cdot j_2$ bis auf den Faktor $r^{\kappa_1 \lambda_1 + \kappa_2 \lambda_2}$. Bildet man nun eine Summe solcher Terme, noch multipliziert mit konstanten Faktoren: $\sum_{(\kappa_1, \kappa_2 \ldots)} c_{\kappa_1 \kappa_2 \ldots} j_1^{\kappa_1} j_2^{\kappa_2} \ldots$, und sorgt dann nur dafür, daß die einzelnen Summanden sich allemal mit derselben Potenz von r multiplizieren, d. h. daß sie alle dasselbe Gewicht haben oder – wie man sagt – „isobar" sind, so erhält man offenbar wiederum relative Invarianten höheren Gerades, da der Faktor der einzelnen Glieder einfach vor die Summe tritt.

9.) Das gibt nun die zentrale Fragestellung der Invariantentheorie: Welches ist in jedem bestimmten Falle das volle System der niedersten Invarianten, aus denen sich sämtliche relativen Invarianten in der angedeuteten Weise ganz und rational aufbauen lassen. Das Haupttheorem ist nun, daß es zu jeder endlichen Anzahl vorgegebener Größen stets ein solches endliches volles Invariantensystem gibt, d. h. endlich viele Invarianten, aus denen sich alle andern ganz und rational zusammensetzen. Diese abschließenden Resultate der systematischen Invariantentheorie verdankt man übrigens deutsche Forschern, nämlich Gordan und Hilbert; besonders ist des letzteren Arbeit in Bd. 36 der math. Ann.[1] hervorzuheben.

Ich möchte nun noch an einfachen Beispielen, wie

1) 1890. – „Über die Theorie der algebraischen Formen." pag. 473 ff.

wir sie hernach in der Geometrie gebrauchen werden, etwas näher die vorgetragenen abstrakten Entwicklungen erläutern.

1.) Nehmen wir zunächst an, daß im binären Gebiete lediglich eine Anzahl von Punkten gegeben seien:

$$\xi_1, \tau_1 ; \xi_2, \tau_2 ; \xi_3, \tau_3, \ldots$$

Dann gilt der interessante Satz, daß die einfachsten Invarianten durch die zweireihigen Determinanten geliefert werden, die man aus diesen Koordinaten bilden kann, und daß diese Determinanten zugleich das volle Invariantensystem bilden.

Wir können aus 2 Punkten 1, 2 folgende zweireihige Determinante bilden:

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \tau_1 \\ \xi_2 & \tau_2 \end{vmatrix} .$$

Das ist tatsächlich eine ganze rationale Funktion der Variablen und auch homogen in ξ_1, τ_1 sowohl als in ξ_2, τ_2. Die invariante Natur erkennen wir sofort, wenn wir unter Benutzung des Determinantenmultiplikationssatzes bilden:

$$\begin{vmatrix} \xi_1' & \tau_1' \\ \xi_2' & \tau_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 \xi_1 + \delta_1 \tau_1 , & \alpha_4 \xi_1 + \delta_4 \tau_1 \\ \alpha_1 \xi_2 + \delta_1 \tau_2 , & \alpha_4 \xi_2 + \delta_4 \tau_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \delta_1 \\ \alpha_4 & \delta_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_1 & \tau_1 \\ \xi_2 & \tau_2 \end{vmatrix} ;$$

also ist $\Delta_{12}' = \varkappa \cdot \Delta_{12}$ und es liegt eine Invariante vom Gewicht 1 vor.

Solcherweise haben n Punkte $1, 2 \ldots n$ im ganzen $\frac{n(n-1)}{2}$ Invarianten

$$\Delta_{ik} = \begin{vmatrix} \xi_i & \tau_i \\ \xi_k & \tau_k \end{vmatrix} \quad (i, k = 1, 2 \ldots n),$$

eine jede vom Gewicht 1; daß diese Determinanten weiterhin das volle Invariantensystem bilden, d. h. daß jede relative Invariante der n Punkte als Summe isobarer Terme

$$\Sigma\, c \cdot \Delta_{ik}^{\alpha} \Delta_{em}^{\beta} \ldots$$

darstellbar ist, – dazu zu beweisen würde freilich hier zu weit führen. Aus diesen relativen Invarianten erhält man die allgemeinsten rationalen absoluten Invarianten als Quotienten bei gleichem Gewichte von Zähler und Nenner; ein einfachstes Beispiel einer absoluten Invariante wäre also der Quotient $\frac{\Delta_{ik}}{\Delta_{em}}$.

Ich möchte nun hier im Beispiel noch eine feinere Begriffsbildung erläutern, die in der Theorie eine große Rolle spielt, nämlich die der Syzygieen (d. h. „Zusammengürtelungen" oder Verknüpfungen von Invarianten). Es kann nämlich vorkommen, daß gewisse jener Aggregate der fundamentalen Invarianten identisch verschwinden; so hat man z. B. bei 4 Punkten

$$\Delta_{12}\,\Delta_{34} + \Delta_{13}\,\Delta_{42} + \Delta_{14}\,\Delta_{23} = 0,$$

was lediglich auf eine bekannte Determinantenidentität hinauskommt, die wir übrigens gelegentlich

früher (I. 61 f.) schon benutzt haben; solche Identitäten zwischen Invarianten des vollen Systems sind es, die man Syzygieen nennt.

Hat man mehrere solche Syzygieen, so kann man durch Multiplikation und Addition neue daraus bilden, und man wird wiederum nach dem vollen System der Syzygieen fragen, aus denen sich alle andern in dieser Weise aufbauen lassen; die Theorie zeigt, daß es stets ein endliches solches System gibt. Im Falle von 4 Punkten z. B. besteht dieses volle System aus der einzigen angegebenen Gleichung, d. h. alle zwischen den 6 Determinanten $\Delta_{12} \cdots \Delta_{34}$ bestehenden Identitäten sind Folgen jener einen; bei mehreren Punkten besteht es aus allen möglichen Gleichungen von jenem Typus. Die Kenntnis dieser Syzygieen ist selbstverständlich von fundamentaler Wichtigkeit für die Kenntnis des gesamten Invariantensystems; denn solche isobare Aggregate der einfachsten Invarianten, die sich nur um Terme unterscheiden, welche die linke Seite einer Syzygie zum Faktor haben, sind ja natürlich identisch, und sollen nicht zweimal aufgezählt werden.

2.) Sind nun ebenso einzelne Punkte im ternären oder im quaternären Gebiete gegeben, so werden natürlich ganz genau so die vollen Invariantensysteme durch

die 3- oder 4-reihigen Determinanten aus ihrerm Koordinaten gegeben; im ternären Gebiet z.B. ist die fundamentale Invariante dreier Punkte, wiederum vom Gewicht 1:

$$\Delta_{123} = \begin{vmatrix} \xi_1 & y_1 & z_1 \\ \xi_2 & y_2 & z_2 \\ \xi_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} .$$

Alles Weitere, insbesondere die hier auftretenden Syzygieen, kann ich Sie nur auffordern selbst durchzudenken.

3.) Steigen wir nun gleich zur Betrachtung einer quadratischen Form, etwa im quaternären Gebiet, auf:

$$f = A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 + 2D\xi\zeta + 2E\eta\zeta + F\zeta^2 + 2G\xi\tau + 2H\eta\tau + 2J\zeta\tau + K\tau^2 .$$

Wir können nun zunächst eine Invariante bilden, die nur von den 10 Koeffizienten $A \dots K$ abhängt, und zwar ist das die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D & G \\ B & C & E & H \\ D & E & F & J \\ G & H & J & K \end{vmatrix} ;$$

da sich die $A \dots K$ kontragredient zu den quadratischen Formen von $\xi \dots \tau$ transformieren, bestätigt man leicht, daß das Gewicht dieser Invariante -2 ist:

$$\Delta' = \varkappa^{-2} \cdot \Delta .$$

Weiterhin besteht das volle System der aus den Koeffizienten der Form allein gebildeten Invarianten aus die-

sein Δ, d. h. jede mögliche ganze rationale Invariante, welche nur $A \ldots K$ enthält, ist eine Potenz von Δ.

Nehmen wir nun die Koordinaten ξ, η, ζ, τ eines Punktes zu den Koeffizienten der Form hinzu, so ist die einfachste gemeinsame Invariante, oder – nach der oben erwähnten Terminologie – Kovariante, die Form selbst:

$$f = A\xi^2 + \ldots + K\tau^2;$$

denn aus der Forderung ihrer Invarianz sind ja die Transformationen der $A \ldots K$ überhaupt bestimmt, und so ist selbstverständlich überhaupt jede vorgegebene Form ihre eigene Kovariante. Sie wird sogar bei unseren Substitutionen überhaupt nicht geändert, ist also eine Invariante vom Gewicht 0 oder eine absolute Invariante. Verwenden wir aber nun 2 Punkte $\xi_1 \ldots \tau_1$ und $\xi_2 \ldots \tau_2$, so tritt als neue Kovariante die sog. Polarform

$$A\xi_1\xi_2 + B(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) + C_1\eta_1\eta_2 + \ldots + K\tau_1\tau_2$$

auf, deren Gewicht wiederum 0 ist, d. h. die ebenfalls absolut invariant ist.

Nehmen wir nun endlich zu f noch eine Linearform φ, d. h. den Inbegriff ihrer Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ hinzu, so erhalten wir die folgende simultane Invariante vom Gewicht – 2, die aus der Determinante durch „Ränderung" mit $\alpha \ldots \delta$ entsteht:

$$\begin{vmatrix} A & B & D & G & \alpha \\ B & C & E & H & \beta \\ D & E & F & J & \gamma \\ G & H & J & K & \delta \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & 0 \end{vmatrix};$$

man kann sie nach dem früheren auch als Kontravariante bezeichnen. Bekanntlich spielt diese Bildung in der analytischen Geometrie eine grosse Rolle, wenn es sich darum handelt, eine Fläche 2. Ordnung in Ebenenkoordinaten darzustellen; man sieht aber, dass der Sache der rein analytische Prozess der Invariantenbildung zu Grunde liegt.

Liegen 2 Linearformen φ_1, φ_2 mit den Koeffizienten $\alpha_1 \dots \delta_1$ und $\alpha_2 \dots \delta_2$ vor, so kann durch „zweimalige Räuderung" derselben Determinante eine weitere Invariante gebildet werden:

$$\begin{vmatrix} A & B & D & G & \alpha_1 & \alpha_2 \\ B & C & E & H & \beta_1 & \beta_2 \\ D & E & F & J & \gamma_1 & \gamma_2 \\ G & F & J & K & \delta_1 & \delta_2 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

die gleichfalls das Gewicht - 2 hat.

Diese wenigen Angaben müssen hier genügen, um

Ihnen einen Einblick in das große Gebiet der Invariantentheorie zu vermitteln. Es ist eine ungemein ausgebreitete Lehre, die sich da entwickelt hat, und man hat insbesondere sehr viel Scharfsinn auf die Herstellung von Verfahren aufgewandt, die zu irgendwie gegebenen Grundformen das volle System der Invarianten und der Syzygieen zu bilden gestatten. Nur eine allgemeine Bemerkung noch! Wie wir in den Beispielen sahen, bewährt sich überall die Determinantentheorie als Grundlage der Invariantentheorie, als Hauptmittel zur Invariantenbildung; diese Beziehung veranlaßte Cayley, den Invarianten ursprünglich überhaupt den Namen Hyperdeterminanten zu geben. Erst später führte Sylvester das Wort „Invarianten" ein. Es ist ganz interessant sich einmal die Frage vorzulegen, für wie wichtig man im Rahmen unserer Gesamtwissenschaft ein spezielles Kapitel der Mathematik halten soll, also etwa die Determinantentheorie. Cayley sagte mir einmal im Gespräche, falls er 15 Vorlesungen über die gesamte Mathematik halten sollte, so würde er eine den Determinanten widmen. Ueberlegen Sie, ob Sie Ihren Erfahrungen nach der Determinantentheorie auch diese Wertschätzung zuteil werden lassen können! Ich selbst habe in meinen gewöhnlichen Elementar-Vorlesungen

aus pädagogischen Gründen die Determinanten immer mehr und mehr zurückgedrängt, weil ich die Erfahrung gemacht habe, daß sich die meisten Hörer wohl an die Schemata gewöhnen, die da in sehr zweckmäßiger Weise lange Ausdrücke abkürzen, daß ihnen aber vielfach ihre Bedeutung keineswegs geläufig wird, und die Gewöhnung an das Schema sie vielmehr hindert, in alle Einzelheiten der Sache bis zu ihrer vollen Beherrschung einzudringen. Selbstverständlich können wir bei allgemeinen Ueberlegungen und so hier bei der Invariantentheorie die Determinanten nicht entbehren.

Und nun kommen wir zu dem Endzweck dieser ganzen Betrachtungen, der

3. Anwendung der Invariantentheorie auf die Geometrie ,

die endlich deren erwünschte Systematisierung geben wird.

Wir beginnen damit, daß wir die Variablen $\xi \ldots \tau$ als gewöhnliche rechtwinklige einhomogene Koordinaten deuten, also ξ, τ in der Ebene, ξ, η, τ im Raume, ξ, η, ζ, τ im vierdimensionalen Raume etc. Die linearen homogenen Substitutionen der Invariantentheorie

$$\xi' = a_1 \xi + \ldots + d_1 \tau$$

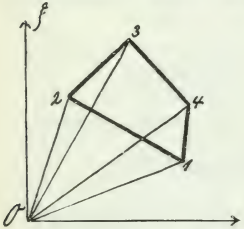
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\tau' = a_4 \xi + \ldots + d_4 \tau$$

stellen die Gesamtheit der affinen Transformationen des

betrachteten Raumes bei festgehaltenem Koordinatenanfangspunkte dar. Wir haben nun die einzelnen Invarianten selbst zu deuten; es werden solche geometrische Größen sein, die bei jenen affinen Transformationen bis auf einen Faktor unverändert bleiben, d. h. Größen, die in der durch jene Transformationen definierten affinen Geometrie eine bestimmte Bedeutung haben.

Sind zunächst im binären Falle, also in der Ebene 2 Punkte 1, 2 gegeben, so stellt die fundamentale Invariante Δ_{12} den doppelten Inhalt des Dreiecks 012, mit passendem Vorzeichen versehen, dar, wie wir von früher her wissen; wir wissen auch (vgl. S. 148), daß sich der Dreiecksinhalt bei jeder affinen Transformation nur um einen bestimmten Konstanten Faktor ändern kann, und das ist aequivalent mit der invariantentheoretischen Aussage, daß Δ_{12} eine relative Invariante ist. Der Quotient zweier Inhalte $\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{34}}$ bleibt absolut unverändert, ebenso aber auch eine Gleichung $\Delta_{12} = 0$, da bei ihr ein hinzutretender Faktor unwesentlich ist; tatsächlich hat diese die bei unserem affinen Transformieren offenbar absolut invariante Bedeutung, daß die 3 Punkte 0, 1, 2 auf einer Geraden liegen.



Was bedeutet nun geometrisch der Satz vom vol-

lem System der Invarianten: Haben wir mehrere Punkte 1, 2, 3, 4 ... und gelingt es irgend eine Größe aus ihnen zu bilden, die allen unseren affinen Transformationen gegenüber relativ invariant ist, d. h. die überhaupt in unserer affinen Geometrie Bedeutung hat, so muß sie sich als Polynom in den Δ_{ik} darstellen. Nun ist beispielsweise jeder Flächeninhalt der Ebene, etwa das Polygon (1, 2, 3, 4), solch eine Invariante, und tatsächlich ist die Formel, die wir früher (S. 17) allgemein für den Polygon-Inhalt gegeben hatten, indem wir die Ecken des Polygons mit dem Punkte O verbanden:

$$(1, 2, 3, 4) = \Delta_{12} + \Delta_{23} + \Delta_{34} + \Delta_{41}$$

nichts als der Ausdruck jenes allgemeinen Theorems für diesen speziellen Fall.

Endlich ist zu überlegen, was die Syzygieen:

$$\Delta_{12}\,\Delta_{34} + \Delta_{13}\,\Delta_{42} + \Delta_{14}\,\Delta_{23} = 0$$

zwischen den Invarianten von je 4 Punkten bedeuten. Das sind Relationen zwischen Dreiecksinhalten, die O und irgend 4 Punkte bilden, und zwar von der Art, daß sie bei allen unseren affinen Transformationen bestehen bleiben. So stellt überhaupt jede Syzygie zwischen Invarianten für unsere Deutung ein Theorem derjenigen affinen Geometrie dar, bei der der Anfangspunkt festgehalten wird. Daß aber hier alle möglichen Syzygieen der 4 Punkte aus dieser einen folgen, heißt, daß alle in unserer affinen Geo-

metrie überhaupt möglichen Sätze über die Punkte 1, 2, 3, 4 aus jenem bestimmten Satze allein folgen. So wird klar, daß die Systematik der Invariantentheorie die lückenlose systematische Angabe aller in unserer affinen Geometrie in Betracht kommenden Begriffe und aller für sie geltenden Sätze gestattet.

Analoge Betrachtungen kann man nun auch anstellen, wenn man neben den Punkten Formen

$$\varphi = a\xi + b\tau, \quad f = A\xi^2 + 2B\xi\tau + C\tau^2 \text{ etc.}$$

in Betracht zieht. Durch jede solche Form wird jedem Punkte der Ebene ein bestimmter Zahlenwert zugeordnet, d. h. in geometrischer Sprache, es liegen Skalarfelder vor; man kann in dieser Auffassung die Invarianten jeder vorgegebenen Form leicht geometrisch deuten, und jede Syzygie zwischen den Invarianten einer Form wird wieder einen geometrischen Satz darstellen. So läßt sich die angedeutete geometrische Systematik vollständig ausbauen.

Was wir bisher machten, ist die nächstliegende, ich möchte sagen, die naive geometrische Deutung der Invariantentheorie: Allgemein zu reden, wird dabei die Invariantentheorie der linearen Substitutionen von $n+1$ Veränderlichen $\xi \ldots \tau$ in einem $(n+1)$-dimensionalen Raume R_{n+1} gedeutet, in dem jene Veränderlichen als gewöhnliche rechtwinklige Koordinaten gelten.

Man kann nun aber jene Variablen auch als homogene Koordinaten in einem n-dimensionalen Raume R_n auffassen, dessen inhomogene Koordinaten $x = \frac{\xi}{\tau} \ldots$ sind; dabei bleibt ein den $n+1$ Koordinaten gemeinsamer Faktor unwesentlich. Wir haben früher (S. 177ff) uns überlegt, in welchem Zusammenhange diese Koordinatenbestimmungen des R_n und R_{n+1} stehen: wir betrachteten R_n als das lineare n-dimensionale Gebilde $\tau = 1$ des R_{n+1}, und projizierten seine Punkte durch Strahlen von dessen Koordinatenanfangspunkt auf den R_{n+1}; dann waren die sämtlichen möglichen Wertsysteme der homogenen Koordinaten eines Punktes aus R_n identisch mit den Koordinaten aller ihm so entsprechenden Punkte im R_{n+1}. Nun stellen die linearen Substitutionen der Variablen im R_n sämtliche projektive Transformationen dar, und zwar geben alle nur durch einen willkürlichen Faktor ϱ' sich unterscheidenden Substitutionen

$$\varrho' \xi' = a_1 \xi + \ldots + d_1 \tau$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varrho' \tau' = a_4 \xi + \ldots + d_4 \tau$$

ein und dieselbe projektive Umformung. Die nunmehr in Betracht kommende Gruppe aller projektiven Transformationen enthält also nicht mehr $(n+1)^2$ sondern nur $(n+1)^2 - 1 = n^2 + 2n$ willkürliche Konstante; im

R_2 und R_3 sind es also speziell 8 bezw. 15.

Wollen wir nun die Invariantentheorie der $(n+1)$ Variabelen $\xi \ldots \tau$ in der projektiven Geometrie des R_n geometrisch deuten, so haben wir vor allem zu bedenken, daß eben wegen der Verwendung homogener Koordinaten nur diejenigen Größen und Beziehungen der Invariantentheorie eine Bedeutung finden können, die in den Koordinaten $\xi \ldots \tau$ jedes einzelnen auftretenden Punktes homogen von unserer Ordnung sind, und die dieselbe Eigenschaft auch in Bezug auf jedes einzelne etwa vorkommende Koeffizientensystem einer linearen, quadratischen etc. Form haben.

Das wird am besten klar werden, wenn ich es sofort an konkreten Beispielen ausführe. Es wird genügen, zunächst vom binären Gebiete $(n=1)$ zu reden; wir haben also 2 Variabele ξ, τ und deuten $x = \frac{\xi}{\tau}$ als Abszisse auf der Geraden. Sind eine Reihe von Wertsystemen ξ_1, τ_1; $\xi_2, \tau_2 \ldots \xi_p, \tau_p$ gegeben, so wissen wir, daß die Determinanten

$$\Delta_{ik} = \begin{vmatrix} \xi_i & \tau_i \\ \xi_k & \tau_k \end{vmatrix} \qquad (i, k = 1 \ldots p)$$

das volle System fundamentaler Invarianten darstellen. Welche der sämtlichen Invariantenaussagen haben nun in der projektiven Geometrie Bedeutung? Nun, die Aussage, daß ein Δ_{ik} irgend einen bestimmten Zahlenwert

hat, jedenfalls nicht, denn wenn man ξ_i, τ_i mit einem Faktor ρ multipliziert, was ja den Punkt i nicht ändert, multipliziert sich auch Δ_{ik} mit ρ. Wohl aber hat das Verschwinden eines Δ_{ik}, die Relation $\Delta_{ik} = 0$ projektive geometrische Bedeutung, denn wir können sie schreiben: $\frac{\xi_i}{\tau_i} = \frac{\xi_k}{\tau_k}$, so daß tatsächlich nur die Verhältnisse der Koordinaten beider Punkte eingehen, und die geometrische Bedeutung – Zusammenfallen der Punkte i und k – evident ist.

Um nun aber eine zahlenmäßige Invariante zu bekommen, die selbst 0ter Dimension ist, müssen wir mehr als 2 Punkte kombinieren; der Versuch zeigt, daß man 4 Punkte 1, 2, 3, 4 braucht und zwar ist dann jeder Quotient folgender Bauart:

$$\frac{\Delta_{12}\ \Delta_{34}}{\Delta_{14}\ \Delta_{32}}$$

in jedem der 4 Variablenpaare $\xi_1, \tau_1; \ldots \xi_4, \tau_4$ homogen von 0ter Dimension; daraus folgt zugleich, daß er das Gewicht 0 hat, d. h. eine absolute Invariante darstellt. Diese Größe hat also als solche eine projektive Bedeutung, und stellt einen allen projektiven Umformungen der Geraden gegenüber invarianten Zahlenwert dar. Sie ist natürlich nichts anderes als das „Doppelverhältnis" der 4 in bestimmter Reihen-

folge geschriebenen Punkte, denn man kann sie in ihnen homogenen Koordinaten sofort schreiben:

$$\frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_4} : \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_4}.$$

Das Doppelverhältnis von 4 Punkten erhalten wir hier vom invariantentheoretischen Standpunkte also mit Notwendigkeit als die einfachste Invariante irgend einer Punktreihe auf der Geraden, die der für eine projektiv-geometrische Bedeutung notwendigen Homogenitätsbedingung genügt.

Ich schliesse hier gern eine allgemeinere Bemerkung an. Ich habe früher schon der in der projektiven Geometrie vielfach bestehenden Tendenz gedacht, alle auftretenden Grössen invarianten Charakters auf Doppelverhältnisse zurückzuführen. Wir können von unserm jetzt gewonnenen Standpunkt das Urteil fällen, dass durch dieses Bestreben die Gewinnung eines tieferen Einblickes in den Aufbau der projektiven Geometrie nur erschwert wird. Viel besser ist es, wenn man zuerst nach allen rationalen ganzen (relativen) Invarianten überhaupt fragt, und nachher erst die rationalen und speziell die der Homogenitätsbedingung der projektiven Geometrie genügenden sucht. Hier hat man dann eine wirkliche vom Einfachsten zum Komplizierteren aufsteigende Systematik vor sich, die vermischt

wird, wenn man die spezielle rationale Invariante, das Doppelverhältnis, voranstellt, und nun ausschließlich rational gebrochene Darstellungen der anderen Invarianten durch sie sucht.

Wir wollen nun weiter aber zusehen, zu was für Sätzen der projektiven Geometrie die Syzygieen zwischen den Invarianten Δ_{ik} Anlaß geben. Die fundamentale Syzygie war da:

$$\Delta_{12}\,\Delta_{34} + \Delta_{13}\,\Delta_{42} + \Delta_{14}\,\Delta_{23} = 0 .$$

Dividieren wir das durch den letzten Summanden der linken Seite und berücksichtigen, daß $\Delta_{23} = -\Delta_{32}$ und $\Delta_{42} = -\Delta_{24}$, so erhalten wir

$$\frac{\Delta_{12}\,\Delta_{34}}{\Delta_{14}\,\Delta_{32}} = 1 - \frac{\Delta_{13}\,\Delta_{24}}{\Delta_{14}\,\Delta_{23}} .$$

Hier steht links das Doppelverhältnis der Punkte 1, 2, 3, 4 nach der ursprünglichen Definition, rechts das ganz genau ebenso gebildete Doppelverhältnis dieser 4 Punkte, wenn man nur die Reihenfolge von 2 und 3 vertauscht; die Doppelverhältnisse in noch anderer Reihenfolge erhält man, wenn man durch andere Terme dividiert. So finden die fundamentalen Syzygieen zwischen den Invarianten von je 4 Punkten ihre geometrische Deutung in den bekannten Relationen zwischen den 6 Werten, die ihr Doppelverhältnis je nach der Reihenfolge der 4 Punkte annehmen kann.

Ich will hier nicht weiter ausführen, wie sich die Fortführung der Aufbauer der projektiven Geometrie der Geraden auf dieser Grundlage, und wie sich ebenso die Deutung der ternären und quaternären Invariantentheorie in der projektiven Geometrie der Ebene und des Raumes gestaltet; Sie finden das beispielsweise in den schon genannten Lehrbüchern von Salmon - Fiedler und Clebsch - Lindemann genau ausgeführt, die gerade mit dieser Deutung der Invariantentheorie fortwährend operieren. So entsteht eine in sich vollständige Systematik der projektiven Geometrie, sowohl was die Gebilde angeht, die man in ihr betrachten kann (die den Invarianten entsprechen), als auch die Theoreme, die man aufstellen kann (entsprechend den Syzygieen). Freilich ist vom Standpunkte des Invariantentheoretikers diese Deutung weniger befriedigend als für den Geometer; für ihn ist die zuerst gegebene Deutung in der affinen Geometrie des R_{n+1} wertvoller, da im R_n nur die der Homogenitätsbedingung genügenden Invarianten und Syzygieen zur Geltung kommen.

Vielmehr will ich nur noch einen besonders wichtigen Punkt hier erörtern, nämlich

4. die Systematisierung der affinen und metrischen Geometrie auf Grund des Cayleyschen Prinzips,

die wiederum nur eine Anwendung der Systematik der Invari-

zententheorie ist. Hier handelt es sich natürlich um die allgemeine affine Geometrie des R_n, wobei keineswegs, wie bei der anfangs betrachteten vollständigen Deutung der Invariantentheorie in der affinen Geometrie des R_{n+1}, ein festgehaltener ausgezeichneter Punkt – der Koordinatenanfangspunkt – existiert.

Betrachten wir sogleich den R_3 mit den inhomogenen Koordinaten x, y, z bezw. den homogenen ξ, η, ζ, τ; wir wissen dann, daß nach dem Cayleyschen Prinzip aus der projektiven Geometrie die <u>affine</u> hervorgeht, wenn wir die <u>unendlichferne Ebene</u> $\tau = 0$, die <u>metrische</u> aber, wenn wir außerdem noch den <u>imaginären Kugelkreis</u> in ihr:

$$\tau = 0 \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$$

jedesmal den vorgelegten Gebilden adjungieren.

Eine <u>Bemerkung über diesen Kugelkreis</u> wird die Darstellung des folgenden erleichtern: Wir haben ihn hier durch <u>2 Gleichungen</u>, als Schnitt der unendlichferneren Ebene mit einem Kegel durch den Nullpunkt, definiert; wir könnten ihn aber auch, wie überhaupt jeden Kegelschnitt, durch nur <u>eine Gleichung in Ebenenkoordinaten</u> bestimmen, wenn wir ihn als <u>Umhüllungsgebilde</u> aller ihn berührenden Ebenen auffassen. Bezeichnen wir, wie wir es zuletzt taten, die „Ebenenkoordinaten" d. h. die Koeffizienten einer Linearform

$\varphi = \alpha \xi + \ldots + \delta\omega$ mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, so lautet die Gleichung des Kugelkreises, wie man leicht verifiziert:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0;$$

- mit anderen Worten, das ist die Bedingung dafür, daß die Ebene $\varphi = 0$ den Kugelkreis berührt.

Nun können wir den Uebergang von der projektiven zur affinen und metrischen Geometrie invariantentheoretisch auffassen: Gegeben sei eine Reihe von Wertsystemen, Punktkoordinaten, Linearformen, quadratische Formen etc. etc. Wir fügen ihnen nun noch die eine bestimmte Linearform τ (d. h. das Koeffizientensystem $0, 0, 0, 1$) bezw. die in Ebenenkoordinaten geschriebene quadratische Form $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ hinzu. Behandeln wir das so erweiterte Formensystem genau wie vorhin, d. h. stellen wir das vollständige System seiner Invarianten und der Syzygieen zwischen diesen auf, und heben diejenigen unter ihnen hervor, die der Homogenitätsbedingung genügen, so erhalten wir alle Begriffe und Sätze der affinen bezw. metrischen Geometrie der ursprünglich gegebenen Elemente; damit ist dann die affine und die metrische Geometrie an unsere vollkommene Systematik angeschlossen.

Statt abstrakter Erörterungen hierüber will ich Ihnen auch diese Beziehungen lieber bald durch ein-

fodre Beispiele deutlich machen, indem ich wirklich zeige, wie man die elementarsten Fundamentalgrößen der affinen und metrischen Geometrie darstellen kann als Simultaninvarianten der gegebenen Größensysteme und der Form τ bezw. $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$.

Aus der *affinen Geometrie* zunächst wähle ich als Beispiel den *Inhalt T des von 4 Punkten gebildeten Tetraeders*, der sich in gewöhnlichen inhomogenen Koordinaten bekanntlich ausdrückt als:

$$T = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Wir haben zu untersuchen, inwieweit dieser Ausdruck, der in homogenen Koordinaten ($x = \frac{\xi}{\tau}$ et. c.) lautet:

$$T = \frac{1}{6\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4}\begin{vmatrix} \xi_1 & y_1 & \xi_1 & \tau_1 \\ \xi_2 & y_2 & \xi_2 & \tau_2 \\ \xi_3 & y_3 & \xi_3 & \tau_3 \\ \xi_4 & y_4 & \xi_4 & \tau_4 \end{vmatrix},$$

die behauptete Invarianteneigenschaft hat. Nun, zunächst wissen wir, daß die hier auftretende Determinante tatsächlich die fundamentale relative Invariante von 4 Punkten ist (S. 297); ferner aber stehen im Nenner die Werte der unserer Figur adjungierten Linearform τ für diese 4 Punkte,

und das sind ja die einfachsten mit Hilfe einer Form überhaupt zu bildenden (absoluten) Invarianten (S. 298). Das ist natürlich so zu verstehen, daß nach einer Transformation in den Zähler die Werte der Form zu schreiben sind, in die die Linearform x übergeht, oder daß, wenn wir allgemein die Form $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + \delta x$ adjungieren, in den Zähler das Produkt der 4 Werte dieser Form für die Punkte 1 ... 4 zu setzen hat. So ist T also selbst auch eine rationale Invariante, und zwar ist sie homogen von nullter Dimension in den Koordinaten jeder dieser 4 Punkte. In Bezug auf die Koeffizienten unserer adjungierten Linearform 0, 0, 0, 1 bezw. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, die ja im Zähler auftreten, ist T allerdings homogen von $(-4)^{ter}$ Dimension, so daß also, da ein gemeinsamer Faktor dieser Größen willkürlich ist, der absolute Wert von T in der projektiven Geometrie unserer erweiterten Figur keine Bedeutung haben kann. Tatsächlich hat man ja auch in der affinen Geometrie zunächst kein Mittel, einem Tetraeder einen bestimmten zahlenmäßigen Inhalt zuzuschreiben, es sei denn, daß man bereits Einheitsstrecken bezw. ein Einheitstetraeder festgelegt hat, wie wir es bei der Benutzung inhomogener Koordinaten ja immer annahmen. Vom unserem jetzigen allgemeinen Standpunkte aus würde das aber heißen,

daß wir der Figur außer der „unendlichferneren Ebene" $\tau = 0$ noch weitere Elemente hinzufügen; adjungieren wir z. B. einen fünften Punkt und bilden den Quotienten zweier Tangelog gebildeter Ausdrücke, so haben wir tatsächlich einen allen Homogenitätsbedingungen genügenden Ausdruck, der dann auch eine absolute Invariante der affinen Geometrie ist. Der einzelne Ausdruck T ist (wir wissen das ja auch schon von früher; vgl. S. 148) lediglich eine relative Invariante vom Gewicht 1.

Hier ist nun der Ort noch einmal auf die ganzen Entwicklungen des ersten Hauptteils hinzuweisen, deren innerster Wesen sich jetzt klar enthüllt. Daß die Graßmannschen Elementargrößen der Geometrie, die wir dort herleiteten, durchaus der affinen Geometrie angehören, das haben wir ja schon beim speziellen Studium der affinen Transformationen erkannt (vgl. S. 145 ff.). Das Graßmannsche Determinantenprinzip aber, das uns jene Größen lieferte, ist – das können wir jetzt nachtragen – durchaus kein unverständlicher Kunstgriff, sondern es ist nichts als die ganz naturgemäße Anwendung der Invariantentheorie in der affinen Geometrie des R_n, d. h. der projektiven Geometrie bei Adjunktion der unendlichferneren Ebene. Das Auftreten der gewöhnlichen quadratischen Determinanten – Strecke,

Flächeninhalt, Rauminhalt – ist ja durch das soeben erörterte Beispiel schon zur Genüge erklärt. Es bleibt nur noch zu zeigen, wie die invariantentheoretische Systematik auf die durch die Unterdeterminanten rechteckiger Matrizen definierten allgemeinen Grassmannschen Elementargrößen führt, und auch das wird wiederum an einem Beispiel am deutlichsten werden: Hat man 2 Punkte ξ_1, y_1, τ_1; ξ_2, y_2, τ_2 in der Ebene, so soll man also das invariantentheoretische Aequivalent der ihnen zugehörigen Gebilde der affinen Geometrie (Strecke, Gerade ...) herstellen. Das ordnet sich nun sofort dem früheren ein, wenn man einen dritten „unbestimmten" Punkt ξ, y, τ hinzunimmt, und nun wiederum die fundamentale Invariante

$$\frac{1}{\tau\,\tau_1\,\tau_2}\begin{vmatrix} \xi & y & \tau \\ \xi_1 & y_1 & \tau_1 \\ \xi_2 & y_2 & \tau_2 \end{vmatrix}$$

als eine Linearform in ξ, y, τ betrachtet. Die drei Koeffizienten dieser Variablen, das sind die Determinanten der Matrix

$$\frac{1}{\tau_1\,\tau_2}\begin{vmatrix} \xi_1 & y_1 & \tau_1 \\ \xi_2 & y_2 & \tau_2 \end{vmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix},$$

sind also die für das neu definierte Gebilde charakteristischen Größen und so sind wir tatsächlich genau auf die früher

zur Definition des Linienteiles 1 2 verwendete Matrix gefüllt worden. Ganz ebenso kann man im Raum aus drei bezw. zwei Punkten durch Adjunktion eines bezw. zweier Quadrupel unbestimmter Koordinaten eine relativ invariante Linear- bezw. Bilinearform bilden, deren Koeffizienten dann ganz in Übereinstimmung mit unserer alten Definition die Koordinaten eines Ebenenteils bezw. räumlichen Linienteiles sind. Ich kann diese Andeutungen hier nicht weiter ins Einzelne ausführen; sie dürften aber wohl zur ersten Orientierung genügen und Sie zu weiterem Nachdenken anregen.

Ich gehe nun zur metrischen Geometrie über, um auch da nur wenige charakteristische Beispiele herauszugreifen; ich werde zeigen, wie die beiden wichtigsten Grundbegriffe „Entfernung r zweier Punkte $\varkappa_1 = \frac{\xi_1}{\tau_1} \dots$ und $\varkappa_2 = \frac{\xi_2}{\tau_2} \dots$, sowie „Winkel ω zweier Ebenen $\delta_1 \dots \delta_4$ und $\delta_2 \dots \delta_4$ aus der invariantentheoretischen Systematik sich ableiten. Nach bekannten Formeln der analytischen Geometrie ist ja:

$$r = \sqrt{(\varkappa_1 - \varkappa_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = \sqrt{\frac{(\xi_1\tau_2 - \xi_2\tau_1)^2 + (y_1\tau_2 - y_2\tau_1)^2 + (\xi_1\tau_2 - \xi_2\tau_1)^2}{\tau_1^2\,\tau_2^2}},$$

$$\omega = \arccos\left(\frac{\delta_1\delta_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2}{\sqrt{(\delta_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2)(\delta_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2)}}\right).$$

Das sind algebraische bezw. transzendente Funktionen der Parameter; wir werden sie als „algebraische" bezw. „trans-

zeudeute "Invarianten bezeichnen dürfen, wenn wir zeigen, daß die rationalen ganzen Bestandteile, aus denen sie sich aufbauen, für sich bereits Invarianten im alten Sinne sind.

Beginnen wir mit dem Winkel ω. Die Figur, deren Invariante er werden soll, besteht aus zwei Linearformen

$$\alpha_1 , \beta_1 , \gamma_1 , \delta_1 \text{ und } \alpha_2 , \beta_2 , \gamma_2 , \delta_2$$

und der den Kugelkreis darstellenden quadratischen Form in Linienkoordinaten:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 .$$

Wir können natürlich aus dieser quadratischen Form in Ebenenkoordinaten genau so Invarianten bilden, wie früher (S. 297ff) aus Formen in Punktkoordinaten, indem wir nur immer Punkt- und Ebenenkoordinaten vertauschen („dualisieren"). Insbesondere sind also die Werte der Form für die beiden gegebenen Wertsysteme:

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 \text{ und } \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2$$

sowie der mit beiden gebildete Wert ihrer Polarform

$$\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2$$

invariant, und gerade aus diesen Ausdrücken setzt sich $\cos \omega$ tatsächlich zusammen; übrigens ist es in jedem der beiden Wertsysteme $\alpha_1 \dots \delta_1$ und $\alpha_2 \dots \delta_2$ und ebenso in den Koeffizienten 1, 1, 1, 0 der gegebenen quadratischen Form, homogen von 0ter Dimension, so daß der Ausdruck in der metrischen Geometrie eine selbständige

Bedeutung hat. Tatsächlich gibt es ja auch in der metrischen Geometrie ein absolutes, vom willkürlichen Annahme der Einheit unabhängiges Winkelmaß. Damit ist zugleich gesagt, daß unser Ausdruck eine absolute Invariante ist.

Was nun weiter die Entfernung r anlangt, so erinnern wir uns, daß wir Invarianten einer quadratischen Form in Punktkoordinaten gebildet hatten, indem wir ihre Determinante mit den Koordinaten einer oder zweier Ebenen rönderten (S. 299). Ebenso werden wir jetzt für die zu betrachtende aus einer quadratischen Form in Ebenenkoordinaten und 2 Punkten bestehende Figur Invarianten erhalten, indem wir – genau dual vorgehend – die Determinante der Form $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

ein- oder zweimal mit den Koordinaten $\xi_1 \dots \tau_1$ und $\xi_2 \dots \tau_2$ der gegebenen Punkte rändern. Aus den so entstehenden Invarianten bilden wir den Quotienten:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y_1 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \zeta_1 & \zeta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_1 & \tau_2 \\ \xi_1 & y_1 & \zeta_1 & \tau_1 & 0 & 0 \\ \xi_2 & y_2 & \zeta_2 & \tau_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \zeta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_1 \\ \xi_1 & y_1 & \zeta_1 & \tau_1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \xi_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \zeta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_2 \\ \xi_2 & y_2 & \zeta_2 & \tau_2 & 0 \end{vmatrix} \right\} .$$

Indem man diese 3 Determinanten ausrechnet, findet man leicht, daß dieser Ausdruck genau dem oben angegebenen Werte von x^2 gleich ist, dessen invariante Natur damit erkannt ist. Übrigens ist er – ähnlich wie die früher betrachtete Fundamentalinvariante der affinen Geometrie – wohl in den Koordinaten der beiden vorgelegten Punkte homogen von nullter Dimension, nicht aber in den Koeffizienten der gegebenen quadratischen Form, in denen er vielmehr homogen von (– 4)ter Dimension ist. Entsprechend ist er auch keine absolute Invariante, denn jede der 3 auftretenden Determinanten hat, da es sich um die dualen Bildungen zu den S. 299 betrachteten Invarianten handelt, das Gewicht + 2, so daß unserem Quotienten das Gewicht 2 – 4 = – 2 zukommt. Also hat der numerische Wert von x noch keine unmittelbare Bedeutung in der metrischen Geometrie, und tatsächlich kann man ja die Entfernung zweier Punkte erst messen, wenn man eine Einheitsstrecke willkürlich festgelegt, d. h. neben der fundamentalen quadratischen Form noch der Figur adjungiert hat. Solche absolute Invarianten der metrischen Geometrie stellen sich dann erst durch Quotienten von Ausdrücken der angegebenen Art dar.

Auch hier kann ich nicht näher ins Detail ein-

geben; diese Beispiele werden Ihnen wenigstens einen ungefähren Begriff davon geben, wie die hier entstehende vollständige Systematik der affinen und der metrischen Geometrie, die aus der systematischen Gliederung der ganzen rationalen Invarianten erwächst, aussieht. Mögen Sie Genaueres in den mehrfach genannten Lehrbüchern nachlesen.

Nur auf ein gewisses kleineres Beispiel will ich hier noch etwas eingehen, das übrigens auch in der Darstellung von Clebsch-Lindemann [1] genau behandelt ist, ich meine die sog. Dreiecksgeometrie. Hier ist im Laufe der Zeit besonders durch die Arbeit der Gymnasiallehrer ein ganzes eigenes Gebiet entstanden, das von den vielen merkwürdigen Punkten, Geraden, Kreisen handelt, die man an einem Dreieck definieren kann: Schwerpunkt, Höhen, Winkelhalbierende, Ankreise, Umkreis, Feuerbachscher Kreis et. c. et. c. Die unzähligen Beziehungen, die man hier immer aufs neue zu finden sich bemüht hat und noch weiter bemüht, kann man nun unserer Systematik ganz leicht einordnen: Gegeben sind da 3 Punkte $E_1|y_1|\xi_1$, $E_2|y_2|\xi_2$, $E_3|y_3|\xi_3$ der Ebene, die Dreiecksecken, und wir adjungieren, da es sich doch ganz um metrische Beziehungen handelt,

1) loc. cit. pag. 312.

die beiden imaginären Kreispunkte, deren Gerademgleichung $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ lautet; wir können aber einfach auch die Werte 1, i, 0 und 1, -i, 0 ihrer Punktkoordinaten adjungieren. Dann ist die ganze Dreiecksgeometrie nichts als die projektive Invariantentheorie dieser 5 Punkte, d. h. schließlich 5 beliebiger Punkte der Ebene, von denen nur 2 sprachlich etwas ausgezeichnet werden. Diese Bemerkung erst verleiht der Dreiecksgeometrie den Charakter eines systematischen durchsichtigen Lehrgebäudes, den man sonst an ihr so vermißt.

Ich schließe damit diese Darlegungen über die Systematik der Geometrie. Gewiß befriedigt es den ästhetischen Sinn, wenn man sich die Dinge so der geschilderten Weise zurecht legt, und da zudem allein diese Systematik eine tiefere Einsicht in die Geometrie vermittelt, sollte gewiß jeder Mathematiker, jeder Lehramtskandidat von ihr Kenntnis haben; darum erschien es mir notwendig, sie in diesem Kolleg zu berücksichtigen, zumal Ihnen ohnehin in der Literatur vielfach diese Auffassung - wenn auch vielleicht nicht immer in so konsequenter Darstellung - entgegengetreten sein wird. Freilich wäre es trotzdem ganz verkehrt, wenn man sich nun dogmatisch an diese Systematik binden und die Geometrie stets nur in ihrem Schema darstellen wollte; denn dann würde sie bald langweilig werden und allen Reiz verlieren, vor

allein aber zum neuen erfindungsreichen Denken hindern, das ja stets unabhängig von jeder Systematik vorgeht.

Waren das gewissermaßen Erörterungen über die Architektur des Gebäudes der Geometrie, so wenden wir uns nun seinen nicht minder wichtigen Fundamenten zu, den

II. Grundlagen der Geometrie.

Einen Ueberblick über das äußerst umfangreiche Gebiet, das wir hier betreten, gibt das Enzyklopädiereferat von F. Enriques über die „Prinzipien der Geometrie" (Enc. III, A B 1). Die Untersuchungen über die Grundlagen treten vielfach in Beziehung zu erkenntnistheoretischen und psychologischen Interessen, denn diese beiden Wissenschaften untersuchen von sich aus, wie die Raumanschauung entsteht und mit welchem Recht man sie mit mathematischen Methoden behandeln darf. Wir werden diese Fragen hier natürlich nur vorübergehend streifen können und werden wesentlich die mathematische Seite des Problemes behandeln, wobei wir die Raumanschauung als gegeben annehmen; auch die für die Pädagogik so wichtige Frage, wie sich im einzelnen Individuum die Raumanschauung zu der präzisen Form entwickelt, an die wir als Mathematiker gewohnt sind, lasse ich beiseite.

Das so eingeschränkte Problem ist dann, das ganze

Gebäude der Geometrie auf möglichst einfacher Grundlage durch rein logische Operationen aufzuführen. Diese Grundlagen freilich kann die reine Logik nicht mehr liefern, und so ist denn die erste Aufgabe ein System gewisser einfacher Grundbegriffe und gewisser einfacher Sätze, der sog. Axiome, aufzustellen, das den einfachsten Tatsachen unserer Anschauung gerecht wird; man kann diese Axiome natürlich je nach Geschmack mehr oder weniger weit in einzelne von einander unabhängige Bestandteile zergliedern, und hat auch sonst bei ihrer Auswahl noch grosse Freiheit. Denn die einzige Bedingung, der das Axiomensystem unterliegt, ist durch den zweiten Teil unserer Aufgabe gegeben: Aus jenen Grundbegriffen und Axiomen soll der ganze Inhalt der Geometrie rein logisch deduziert werden, ohne dass man aufs neue an die Anschauung zu appellieren braucht.

Hierfür aber legt uns der ganze Gang unserer Vorlesung einen bestimmten charakteristischen Weg nahe. Wir hatten uns ja stets prinzipiell der Hilfsmittel der Analysis, speziell der Methoden der analytischen Geometrie bedient: So wollen wir denn auch hier wiederum die Analysis als bekannt annehmen und werden nur fragen, wie man auf dem kürzesten Wege von dem Axiomensysteme zu den Ansätzen der analytischen

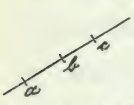
Geometrie gelangen kann. Leider wird diese einfache Formulierung nur selten verwendet, da die Geometer häufig eine gewisse Scheu vor der Verwendung der Analysis haben, und so weit als irgend möglich ohne Zahlen auskommen wollen.

Was nun die Durchführung der hiermit im allgemeinen angedeuteten Aufgaben anlangt, so sind eine Reihe verschiedener Wege möglich, je nachdem, welche Grundbegriffe und Axiome man gerade hervorheben will. Vielfach üblich und bequem ist es an die Spitze der Betrachtung die Grundbegriffe der projektiven Geometrie zu stellen, nämlich Punkt, Gerade und Ebene, die wir ja schon früher (S. 117.) als solche hervorhoben. Dabei soll nicht etwa definiert werden, was das für Dinge sind – das muß jedermann von Hause aus wissen! – sondern es sollen nur soviele ihrer charakteristischen Eigenschaften und gegenseitigen Beziehungen aufgestellt werden, daß man aus ihnen im oben präzisierten Sinne die ganze Geometrie herleiten kann. Die einzelnen Axiome, in denen das geschieht, will ich Ihnen hier nicht vollständig aufzählen – das würde uns in dieser enzyklopädischen Vorlesung zu weit abseits führen –, sondern ich will nur ihren Inhalt soweit charakterisieren, daß Sie eine Vorstellung von ihnen bekommen.

Das erste sind die Sätze der Verknüpfung, die ich für

die projektive Geometrie ja schon früher (S. 117) ausgesprochen hatte. Wir wollen aber hier nicht von vornherein, wie dort, die ausnahmslose Existenz eines Schnittpunktes zweier Geraden derselben Ebene oder einer Schnittgerade zweier Ebenen fordern, sondern, wie es dem unmittelbaren Verhältnissen der metrischen und affinen Geometrie entspricht, uns auf den Satz beschränken, daß 2 Gerade der Ebene einen Punkt oder keinen, 2 Ebenen eine Gerade oder gar keinen Punkt gemein haben; man kann dann nämlich doch nachträglich in gewisser Weise durch Adjunktion „uneigentlicher" Punkte, Geraden und Ebenen zu dem vollständigen System der projektiven Geometrie aufsteigen.

Die Anordnungssätze weiterhin beschreiben, wie in der Ebene und auf der Geraden verschiedene Punkte zu einander liegen können, daß also z. B. von 3 Punkten a, b, c einer geraden Linie stets einer c zwischen den beiden andern a und b liegt und so fort, man nennt sie wohl auch kurz Sätze der Zwischen.



Was endlich Stetigkeitseigenschaften anlangt, so sei hier vorläufig nur die Lückenlosigkeit der Geraden hervorgehoben: Teilt man die Strecke zwischen 2 Punkten a, c irgendwie in 2 Teile 1, 2, so daß (wenn a links von c liegt) alle Punkte von 1 links von allen Punkten von 2 liegen, so gibt es gerade einen Punkt b, der diese Einteil-

lung hervorruft, derart, daß zwischen a und b der Teil 1, zwischen b und c der Teil 2 liegt. Das entspricht offenbar ganz der Einführung der Irrationalzahlen durch den Dedekindschen Schnitt. [1]

Aus diesen Axiomen kann man nun die ganze projektive Geometrie der Raumes herleiten, insbesondere natürlich auch sehr bald in gewisser Weise Koordinaten einführen, und die projektive Geometrie analytisch behandeln.

Will man nun weiter zur metrischen Geometrie gelangen, so hat man zuerst zu berücksichtigen, daß man mit der projektiven Geometrie auch den Begriff der Gruppe der ∞^{15} Kollineationen oder projektiven Umformungen der Raumes hat; aus dieser soll man dann eine Untergruppe von ∞^{6} Transformationen, den sog. Bewegungen, herausgreifen, gegenüber denen die sämtlichen geometrischen Eigenschaften erhalten bleiben, die metrische Geometrie mit allen ihren Einzelheiten wird dann als Invariantentheorie dieser Gruppe zu definieren sein. Die in Rede stehende Gruppe wird nun, wie wir aus früheren Erörterungen ohne weiteres übernehmen können, in der Hauptsache dadurch charakterisiert, daß wir eine Ebene, die unendlichferne Ebene,

[1] vgl. Teil I, pag. 85.

und in ihr ein Polarsystem, das absolute Polarsystem, das eine imaginäre Ordnungskurve (den Kugelkreis) besitzt, auszeichnen, und verlangen, daß sie bei jener Gruppe unverändert bleiben. Durch diese Forderung werden zunächst ∞^7 Transformationen (Bewegungen und Ähnlichkeitstransformationen) bestimmt, die die Entfernung zweier Punkte nur bis auf einen Faktor ungeändert lassen; um die allgemeinen Ähnlichkeitstransformationen auszuschließen, mag man dann etwa noch die Zusatzforderungen stellen, daß die Bahnkurven einer Bewegung geschlossen sind, sowie sie nur einen Punkt fest läßt (d. h. daß sie dann eine Drehung ist).

Dieser ganze Aufbau der Geometrie ist vielleicht der theoretisch einfachste, da er zunächst für die projektive Geometrie ausschließlich mit linearen Gebilden operiert, und erst hinterher, wenn es für die metrische Geometrie notwendig wird, ein quadratisches Gebilde, den Kugelkreis hineinnimmt. Dafür ist seine Durchführung allerdings recht abstrakt und langwierig, und sie kann nur in einer eigenen Vorlesung über projektive Geometrie Platz finden. Hier muß es genügen, wenn ich Sie nach dieser allgemeinen Auseinandersetzung noch auf diejenige Darstellung in der Literatur verweise, die wohl die lesbarste ist, nämlich auf die von K. Fleischer

übersetzten „Vorlesungen über projektive Geometrie“ [1] von F. Enriques.

Für allgemeine Unterrichtszwecke geeigneter scheint mir ein anderer Aufbau der Geometrie, dem ich mich jetzt – der Einfachheit halber unter Beschränkung auf die Geometrie der Ebene – zuwende:

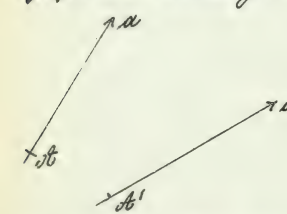
1. Aufbau der ebenen Geometrie unter Voranstellung der Bewegungen.

Als Grundbegriffe nehmen wir Punkt und Gerade an und setzen Axiome über ihre Verknüpfung, Anordnung und Stetigkeit voraus. Dabei enthalten die Verknüpfungssätze wiederum nur, daß durch irgend 2 Punkte stets eine und nur eine Gerade geht, während 2 Gerade entweder einen oder keinen Punkt gemein haben können. Auf die genauere Formulierung der Anordnungs- und Stetigkeitsaxiome wird im Verlauf der Untersuchung noch zu verweisen sein.

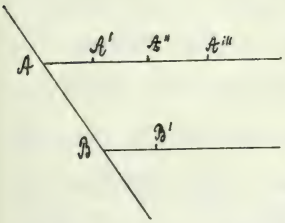
Auf dieser Grundlage wollen wir nun sofort die Gruppe der ∞^3 Bewegungen der Ebene definieren, um mit ihrer Hilfe das System der ebenen analytischen Geometrie zu begründen, wie es ja stets unser Ziel ist. Eine Bewegung soll das sein, was wir anschaulich von unseren Erfahrungen mit starren Körpern her kennen.

1/ Leipzig 1903. – Original: Lezioni di geometria proiettiva. Bologna 1898.

nen. Abstrakt gesprochen soll es eine eineindeutige Transformation der Punkte unseres Raumes sein (also insbesondere jedem Punkt gewiß einen im Endlichen gelegenen zuordnen) und ferner soll sie Gerade ausnahmslos in Gerade überführen. Es ist begreiflich, wenn wir für solche Transformationen bald wieder das Wort Kollineation gebrauchen; freilich wissen wir a priori nicht, ob es überhaupt solche Kollineationen gibt, da wir ja noch nicht - wie vorhin - im Besitz der projektiven Geometrie sind. Wollen wir uns also von Anfang an jener ausgezeichneten Kollineationen bedienen, so müssen wir ihre Existenz durch ein neues Axiom ausdrücklich postulieren; demgemäß fordern wir, daß es eine Gruppe von ∞^3 gewissen Kollineationen gibt, die wir Bewegungen nennen, und als deren Invariantentheorie wir die Geometrie der Ebene anzusehen haben. Dabei ist noch präziser zu charakterisieren, was mit dem „dreifach unendlich" gemeint ist: Es seien beliebig irgend 2 Punkte A, A' gegeben und je eine Halbgerade a von A aus, a' von A' aus; dann soll es stets eine und nur eine Bewegung geben, die den Punkt A in A' und gleichzeitig den Strahl a in a' überführt. Figuren, die durch eine Bewegung ineinander übergehen, nennen wir kongruent.



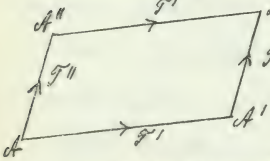
Diesem allgemeinen Postulat über die Bewegungsgruppe stellen wir noch ein spezielles Postulat über eine in ihr enthaltene Untergruppe an die Seite. Es gibt nach dem soeben Gesagten genau 1 Bewegung, die einen Punkt A in einen beliebig gegebenen A' und gleichzeitig die Gerade von A nach A' (mit dieser Richtung) in sich selbst überführt; eine solche Bewegung – wir nennen sie Verschiebung (Translation) oder deutlicher Parallelverschiebung – soll nun stets die Eigenschaft haben, die Verbindungsgerade je zweier entsprechender Punkte B, B', in ganzen also ∞^1 Gerade, in sich überzuführen, und außerdem sollen alle ∞^2 Verschiebungen eine Gruppe bilden. Wiederholen wir immer eine und dieselbe Verschiebung, so geht A stets in Punkte A', A'', A''' ... der Geraden AA' über, und wir fordern weiterhin, daß alle diese Punkte auf einer der durch A geschiedenen Hälften dieser Geraden liegen, und daß sie schließlich jeden Punkt dieser Halbgeraden erreichen oder einschließen. Durch Wiederholung der reziproken Transformation erhalten wir eine Punktfolge der gleichen Art auf der anderen Halbgeraden. Indem wir uns die Vorstellung bilden, daß wir jede Verschiebung kontinuierlich aus der Anfangs- in die Endlage vornehmen, wie



wir das hernach noch benutzen werden, nennen wir die in Rede stehende Gerade die Bahnkurve des Punktes A bei der Verschiebung; jede Verschiebung hat ∞^1 Bahngerade.

Nun können sich zwei verschiedene Bahngerade ein und derselben Translation nicht schneiden; denn man sieht leicht, daß ihr Schnittpunkt sonst bei einer Translation aus 2 verschiedenen Punkten je einer der Bahngeraden hervorgehen müßte - entgegen dem Charakter der Translation als eineindeutiger Punkttransformation. Wir nennen nun diese sämtlichen Bahngeraden ein und derselben Translation parallele Geraden, und haben damit von vornherein diesen Begriff aus einer Eigenschaft unserer Bewegungen heraus eingeführt. Gleichzeitig ist klar, daß es durch jeden Punkt A zu einer Geraden a jedenfalls eine Parallele gibt - nämlich seine Bahngerade in einer Verschiebung längs der gegebenen Geraden a.

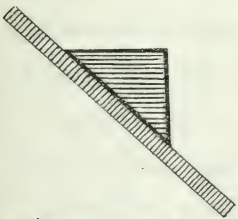
Nun haben wir noch ein letztes Axiom über diese Verschiebungen aufzustellen, daß nämlich 2 beliebige Verschiebungen T', T'' mit einander vertauschbar seien, d. h. daß stets derselbe Punkt B herauskommt, wenn man einen bestimmten Punkt A zuerst der Verschiebung T' und dann der T'', oder wenn



man ihm zuerst der Verschiebung T' und dann der Transformation T'':

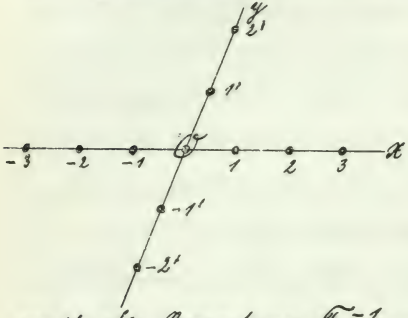
$$T'.T'' = T''.T'.$$

Auf die Frage, wie man überhaupt auf solche Axiome kommt, werde ich später noch genauer einzugehen haben, und möchte hier nur betonen, daß unsere Vordersätze gerade das ausdrücken, was jedem Menschen von den ersten Anfängen der geometrischen Zeichnens her geläufig ist. Denn da ist das erste, was man tut, daß man einen starren Körper, Lineal oder Zirkel oder dgl, von einem Ort der Zeichenebene zum anderen bewegt, um Größen zu übertragen, und insbesondere wendet man die Operation der Translation ungleich oft an, indem man etwa ein Dreieck an einem Lineal entlang führt; dabei zeigt die Erfahrung immer wieder, daß alle Punkte des Dreiecks, parallele Gerade beschreiben. Unsere Axiome, die wir logisch nicht mehr weiter zergliedern, haben also der Natur der Sache nach nichts Künstliches an sich.



Nun wollen wir zusehen, wie weit wir von diesen ersten auf die Verschiebungen bezüglichen Begriffen aus in die analytische Geometrie eindringen können. Von rechtwinkligen Koordinaten können wir freilich nicht

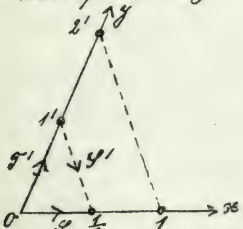
reden, da wir für die Definition eines rechten Winkels bisher noch gar keinen Anhaltspunkt haben, wohl aber können wir allgemeine Parallelkoordinaten einführen. Wir legen durch einen Punkt O irgend 2 Gerade, die wir als x- und y-Achse bezeichnen. Nun fassen wir die Verschiebung T auf, die O in irgend einen Punkt 1 der x-Achse verwandelt; durch Iteration entstehen die Punkte 2, 3, 4 ... der x-Achse; indem wir ebenso wiederholt die



reziproke Operation T^{-1} ausführen, die dadurch definiert ist, daß sie 1 in O überführt, geht O in die Punkte $-1, -2, -3 \ldots$ der x-Achse über. Wir ordnen den so erhaltenen Punkten die positiven und negativen ganzen Zahlen $0, 1, 2 \ldots, -1, -2 \ldots$ als Abszissen x zu. Genau ebenso nehmen wir irgend eine Verschiebung T' längs der y-Achse, und indem wir sie beliebig oft vor- und rückwärts ausführen, erhalten wir in allen aus O hervorgehenden Punkten $1', 2', 3' \ldots$, $-1', -2', -3', \ldots$ die Punkte der y-Achse mit positiven und negativen ganzzahligen Ordinaten. Dabei ist aber wohl zu beachten, daß wir die so definierten Längen x und y auf beiden Achsen wechselseitig nicht in Beziehung setzen können, da eine die x- in die y-Achse überführ-

rende Bewegung (Drehung) uns bisher nicht zur Gebote steht.

Nun können wir aber weiter auch zu Punkten der x-Achse mit nicht ganzzahligen Abszissen aufsteigen, indem wir immer die einmal beliebig gewählte Einheit festhalten. Was zunächst die rationalen Punkte angeht, so wird – um die Sache an einem Beispiel deutlich zu machen – der Punkt $\frac{1}{2}$ definiert als der Endpunkt derjenigen Verschiebung S von 0, die einmal wiederholt gerade die Einheitsverschiebung T von 0 nach 1 ergibt. Um die Existenz eines solchen Punktes bezw. dieser Verschiebung S nachzuweisen, zeigen wir zunächst, daß jedenfalls die Gerade von $\frac{1}{2}$ nach dem Punkte 1' der y-Achse parallel der Geraden 2'1 sein müßte (was der bekannten Konstruktion zur Teilung einer Strecke in gleiche Teile entspricht). Fassen wir nämlich die Verschiebung S von 0 nach $\frac{1}{2}$ auf als Aufeinanderfolge der Verschiebungen T' von 0 nach 1' und S' von 1' nach $\frac{1}{2}$, so kann man die zweimalige Verschiebung S, die ja ex definitione 0 in 1 überführen soll, in Anbetracht der Vertauschbarkeit je zweier Translationen ersetzen durch die Aufeinanderfolge der iterierten Verschiebung T' und der iterierten S'; da aber erstere 0 in 2' überführt, so kann man das auch so ausdrücken, daß



1 aus 2' durch zweimalige Translation S' entsteht. Also ist 2' 1 eine Bahngerade der Verschiebung S' und als solche in der Tat der Bahngeraden 1' $\frac{1}{2}$ derselben Verschiebung parallel. Nun besitzen wir ja nach dem früheren bereits die Punkte 2' und 1 und damit die Translation S'! Es wäre also auch die eindeutige Konstruierbarkeit des Punktes $\frac{1}{2}$ aus den bereits vorhandenen Elementen als des Schnittpunktes der x-Achse und der Bahngeraden von 1' in jener Translation S' gesichert – wenn wir nur wüßten, daß diese Bahngerade die x-Achse auch wirklich schneidet. Das kann ja anschaulich natürlich keinem Hexenschrei zweifelhaft sein, im Rahmen unserer Axiomatik aber muß man zu diesem Schluß noch ein besonderes Axiom, das sog. „ebene Zwischenaxiom" heranziehen; es sagt aus, daß eine Gerade, die durch eine Seite eines Dreiecks in dasselbe hineintritt, durch eine andere wieder heraustreten muß – eine triviale Tatsache unserer Raumanschauung, die nur als solche besonders hervorgehoben werden muß, da sie von den anderen Axiomen logisch unabhängig ist. – Durch ganz die gleichen Ueberlegungen erhält man offenbar überhaupt zu jedem rationalen Abszissenwert x einen Punkt.

Um nun aber zu irrationalen Punkten zu gelangen, braucht man ein neues, übrigens gleichfalls an-

ferst plausibler Postulat, das nur die oben angekündigte Präzisirung der Stetigkeitsforderung ist: Es soll außer den soeben hergestellten rationalen Punkten bezw. Verschiebungen noch unendlich viele andere Punkte der x-Achse bezw. Verschiebungen derselben in sich geben, und diese sollen zu den rationalen Punkten und zueinander in genau den gleichen Beziehungen der Aufeinanderfolge und Stetigkeit stehen, wie die irrationalen und rationalen Zahlen. Dieses Postulat ist um so plausibler, als umgekehrt doch die Einführung der irrationalen Zahlen historisch vor der Betrachtung der geometrischen Stetigkeit aus erfolgt ist. [1] Demnach sind dann schließlich alle Punkte der x-Achse auf alle positiven und negativen reellen Zahlen x eineindeutig bezogen, und genau das Analoge gilt natürlich für die Punkte der y-Achse.

Ich weise übrigens darauf hin, daß das so geschilderte Verfahren der Herstellung eines Maßstabes auch wieder durchaus naturgemäß ist; wer sich einen Maßstab herstellt verfährt so, daß er einen starren Körper von der schließlich willkürlichen Länge der Einheit (etwa die Entfernung der Zirkelspitzen) auf seinem Lineal entlang verschiebt, und die so entstehenden Strecken unterabteilt.

Wir können nun jede Verschiebung der Ebene

1) Vgl. die Anmerkungen in Teil I, pag. 87.

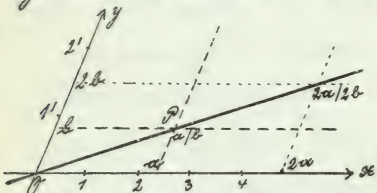
parallel zur x-Achse analytisch charakterisieren durch die Gleichung:

$$x' = x + a,$$

d. h. zur Abszisse jedes Punktes wird das rationale oder irrationale, positive oder negative Stück a addiert; ebenso ist eine Verschiebung längs der y-Achse durch

$$y' = y + b$$

beschrieben. Nehmen wir nun diese beiden Verschiebungen nacheinander vor, gleichgültig in welcher Reihenfolge, so geht O in einen bestimmten Punkt P der Ebene über, der wegen der Vertauschbarkeit der Verschiebungen eindeutig bestimmt ist; wir sagen dann, daß P die Abszisse a und die Ordinate b hat. Umgekehrt kann man aber auch so jedem Punkte P zwei Zahlen a, b eindeutig zuordnen; man braucht nur die Verschiebung von O nach P vorzunehmen und für die Schnitte der neuen Lagen, in die die Achsen dabei kommen mit ihren ursprünglichen Lagen Abszisse und Ordinate zu bestimmen. Damit ist die Gesamtheit der Punkte der Ebene auf die Gesamtheit der Zahlenpaare (a | b) eineindeutig abgebildet, d. h. wir haben tatsächlich eine vollständige Koordinatenbestimmung.



Zu überlegen bleibt nur, wie jetzt die Gleichung der

Geraden aussieht. Betrachten wir zunächst die Gerade von 0 nach $P(a|b)$; sie muss offenbar sämtliche Punkte enthalten, die durch Iteration der von 0 nach P führenden Verschiebung entstehen, also die Punkte

$$x = \lambda a \qquad y = \lambda b$$

mit ganzzahligem λ. Des Weiteren aber erkennt man ganz leicht, dass auch alle solche Punkte mit rationalem und schliesslich mit irrationalem λ auf ihr liegen müssen, und dass dadurch alle ihre Punkte erschöpft werden; durch Elimination von λ ergibt sich also ihre Gleichung als

$$x : y = a : b \quad \text{oder} \quad bx - ay = 0 ;$$

daher stellt auch jede Gleichung der Form

$$\alpha x + \beta y = 0$$

eine Gerade durch 0 dar. Da nun jede beliebige Gerade aus einer solchen Geraden durch 0 durch eine Parallelverschiebung entsteht, folgt schliesslich, dass sämtliche Geraden durch sämtliche Gleichungen 1. Orden.

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

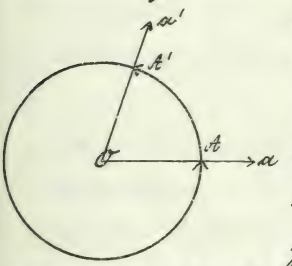
dargestellt werden, die man ja eben darum lineare Gleichungen nennt. In dieser Tatsache, dass die Gerade eine lineare Gleichung hat, ist aber bereits sehr viel enthalten, was sich durch die Methoden der analytischen Geometrie nun ohne Schwierigkeit ergibt. Ich gehe da-

rauf im Einzelnen nicht ein und führe lediglich tatsächlich an, daß man so die gesamte affine Geometrie, und darin enthalten also auch die gesamte projektive Geometrie herleiten kann; damit ist also der Standpunkt gekennzeichnet, bis zu dem uns das spezielle Postulat über die Untergruppe von ∞^2 Verschiebungen geführt hat. Nun eine Tatsache, die wir später brauchen werden, will ich noch hervorheben. Wir hatten früher auf Grund der Sätze der projektiven Geometrie den Möbiusschen Satz bewiesen, daß jede Kollineation, d. h. eine Transformation, die Gerade in Gerade überführt, eine projektive Umformung ist, d. h. eine Umformung, die durch lineare Substitutionen der Koordinaten dargestellt wird. Nun waren ja nach unserer ersten Annahme die Bewegungen Kollineationen, andererseits besitzen wir jetzt bereits die gesamte projektive Geometrie und daher gilt insbesondere auf unserem Standpunkt auch der Möbiussche Satz: Also stellt sich jede Bewegung notwendig als lineare Transformation in den soeben eingeführten Parallelkoordinaten x, y dar.

Wollen wir nun aber noch weiterhin in die metrischen Begriffe der Geometrie eindringen, besonders also den Winkel zweier Geraden und die Entfernung zweier beliebigen Punkte / bisher können wir ja nur

von der Entfernung zweier Punkte auf ein- und derselben Achse reden] kennen lernen, so müssen wir uns weiter mit der vollen Bewegungsgruppe beschäftigen.

Wir wollen besonders die Bewegungen ins Auge fassen, die einen Punkt, etwa den Anfangspunkt O, unverändert lassen, die sog. Drehungen um diesen Punkt. Nach der früheren allgemeinen Annahme über die Bestimmung einer Bewegung gibt es dann genau eine Drehung, die einen Halbstrahl a durch O in irgend einen anderen Halbstrahl a' durch O überführt. Diese Drehungen sind gewissermaßen dual zu den Verschiebungen, da sie einen Punkt unverändert lassen, so wie diese eine Gerade in sich überführen. Genau wie die Verschiebungen wollen wir uns auch die Drehungen kontinuierlich von der Anfangslage an ausgeführt denken, und wir werden wieder von der Bahnkurve reden, die jeder Punkt dabei beschreibt.

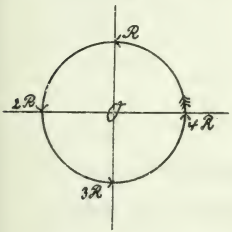


Es besteht jedoch ein Unterschied zwischen Drehungen und Verschiebungen, den wir auch hier ausdrücklich mit unter unseren Postulaten formulieren müssen: Die durch Wiederholung einer und derselben Drehung um O aus a entstehenden Halbstrahlen a', a''... sollen jeden Halbstrahl

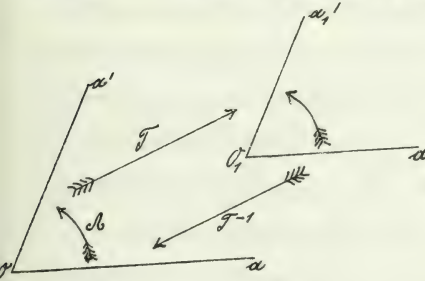
durch O schließlich entweder erreichen oder einschließen (während eine Translation nur die Punkte einer Hälfte der festen Geraden lieferte). Insbesondere muß daher die kontinuierliche Drehung a schließlich in seine Ausgangslage zurückführen, wobei notwendig auch jeder Punkt von A in seine Ausgangslage zurückkehrt: Die Bahnkurven sind also geschlossene Linien, die jede Halbgerade von O in genau 1 Punkte A treffen, derart, daß alle Strecken OA einander gleich (d. h. durch eine Bewegung ineinander überführbar) sind; sie sind also das, was man gewöhnlich Kreise mit dem Mittelpunkt O nennt.

Nun werden wir im Strahlenbüschel um O mit Hilfe dieser Drehungen eine Skala festlegen, ganz analog wie wir sie oben auf der Geraden mit Hilfe der Verschiebungen konstruierten, wobei wir nur noch passende Stetigkeitsannahmen machen müssen. Ich brauche das hier wohl nicht im einzelnen auszuführen und gebe nur als Resultat an, daß wir schließlich dazu kommen, jeder Drehung eine reelle Zahl, den Winkel dieser Drehung zuzuordnen; dabei tritt auch jede reelle Zahl als Drehwinkel auf. Als neues Moment erscheint natürlich die Periodizität der Drehung, und es liegt nahe, gerade die volle Drehung, die A wieder in sich überführt, als Einheit zu wäh-

len. Man nimmt aber herkömmlicher Weise zur Kürze die Vierteldrehung, die viermal wiederholt die volle Drehung gibt, und deren Winkel man einen Rechten R nennt; jede Drehung wird dann durch ihren Winkel w.R gemessen, wo w jede beliebige reelle Zahl sein kann, die man aber die Periodizität wegen auf die Werte von 0 bis 4 beschränken darf.



Entsprechend kann man nun in dem Strahlenbüschel um jeden anderen Punkt O_1 die Winkelskala definieren; man kann aber auch mit Hilfe der Translation die Winkelskala von O unmittelbar auf O_1 übertragen. Sind nämlich die Halbstrahlen a_1, a_1' durch O_1 gegeben, und ist T die Verschiebung, die O in O_1 überführt, so bezeichnen wir die Halbstrahlen durch O, in die die Strahlen a_1, a_1' vermöge T^{-1} übergehen, mit a, a'; ist dann $\mathfrak{A}$ die Drehung um O, die a in a' verwandelt, so gilt für die Drehung von a_1 in a_1' um O_1



$$\mathfrak{A}_1 = T^{-1}\,\mathfrak{A}\,T\,;$$

denn auch die rechte Seite stellt eine Bewegung dar, die

O_1, a_1 in O_1', a_1' überführt, und eine solche Bewegung ist eindeutig bestimmt. Wir legen nun $\mathfrak{A}_1$ denselben Winkel w. R bei, wie ihn $\mathfrak{A}$ nach der obigen Definition hat. Haben wir nun eine zweite Drehung $\mathfrak{A}'$ im Büschel O, so entspricht ihr im Büschel O_1:

$$\mathfrak{A}_1' = \mathfrak{T}^{-1}\,\mathfrak{A}'\,\mathfrak{T},$$

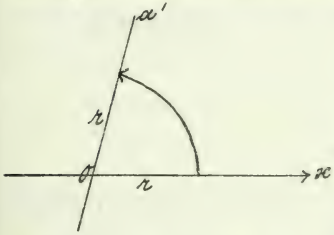
und die Zusammensetzung von $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_1'$ ist

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_1' = \mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{A}\,\mathfrak{T}\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{A}'\,\mathfrak{T} = \mathfrak{T}^{-1}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}')\,\mathfrak{T}$$

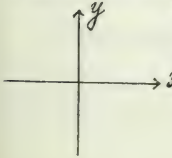
und entspricht also der Zusammensetzung von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$. Daraus folgt, daß unsere Uebertragung tatsächlich bei O_1 dieselbe Skala liefert, wie sie durch Wiederholung des direkten Verfahrens entstehen würde.

Es gibt bei Euklid einen Satz, der in die meisten unserer elementaren Lehrbücher übergegangen ist, daß nämlich alle rechten Winkel gleich sind; jeder Knabe wird freilich diesen Satz für selbstverständlich halten, und ich meine, daß man ihn auf der Schule tatsächlich sparen sollte, da der Schüler doch nicht auffaßt, was mit ihm gemeint ist. Sein tatsächlicher Inhalt aber ist mit dem in den letzten Ausführungen Enthaltenen identisch: daß man gleiche Winkel, die durch Drehungen an verschiedenen Punkten definiert sind, tatsächlich durch Bewegungen zur Deckung bringen kann, d. h. eben daß sie kongruent sind.

Nachdem wir so den Winkel allgemein definiert haben, werden wir auch die Entfernung zweier beliebiger Punkte definieren, während wir bisher Entfernungen nur auf ein und derselben Geraden verglichen konnten. Haben wir jetzt aber eine Entfernung x auf der x-Achse etwa von O aus abgetragen, so können wir sie durch Drehung um O auf jede beliebige Gerade x' durch O übertragen; so können wir überhaupt die ganze Längenskala auf der x-Achse auf x' und dann durch Verschiebung weiter auf jede Parallelgerade zu x' und damit überhaupt auf jede beliebige Gerade übertragen. Wir können also tatsächlich den Abstand zweier beliebiger Punkte messen, indem wir sie durch eine Gerade verbinden und in der angedeuteten Weise den Maßstab auf sie übertragen.



Nun wollen wir mit dem neuen Begriff der Drehung unseren Apparat der analytischen Geometrie vervollständigen. Dabei wollen wir, was wir ja jetzt tun können, statt der allgemeinen Parallelkoordinaten speziell rechtwinklige Koordinaten x, y einführen. Wir wissen bereits (S. 340), daß sich jede Bewegung als eine lineare Substitution in x, y darstellt:



$$x' = (x_1 x + b_1 y + c_1) : N$$
$$y' = (a_2 x + b_2 y + c_2) : N$$

Da sie jeden im Endlichen gelegenen Punkt wieder in einen solchen überführt, muß der Nenner N Konstant sein, und er darf daher gleich 1 gesetzt werden; betrachten wir speziell eine Drehung um 0, so ist $c_1 = c_2 = 0$, und es bleibt

$$(1) \qquad \begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y \\ y' = a_2 x + b_2 y . \end{cases}$$

Für eine besondere Drehung, nämlich die um einen Rechten, können wir nun unmittelbar die genaue Form der Gleichungen angeben; sie führt nämlich, da wir rechtwinklige Koordinaten haben, die x-Achse in die y-Achse, die y-Achse in die negative x-Achse über, und wird daher einfach dargestellt durch

$$(2) \qquad \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

Nunmehr ist die Frage nach der Angabe der Drehungsformeln auf eine rein analytische Aufgabe zurückgeführt: Es soll eine solche einfach unendliche Gruppe von Substitutionen (1) angegeben werden, die die Einheitssubstitution (2) enthält und aus ihr allgemein durch w-malige Iteration entsteht, wo w irgend eine ganze, rationale oder schließlich irrationale Zahl ist.

Wir müssen uns nun klar darüber sein, daß wir hier an geometrischer Kenntnis, speziell über die Drehungsformeln eines rechtwinkligen Koordinatensystems, nichts voraussetzen dürfen, wohl aber können und wollen wir Kenntnisse in der Analysis rücksichtslos benutzen; dann wird unser Aufbau zwar in dieser Form für den Schulunterricht unmittelbar nicht verwendbar, nimmt aber dafür eine sehr elegante und einfache Gestalt an.

Ich beginne mit der Bemerkung, daß sich die Einheitsdrehung (2) unter Benutzung komplexer Zahlen auch in die eine Formel zusammenfassen läßt

$$x' + i y' = i(x + i y) \qquad (2!)$$

Aus dieser Gestalt entnimmt man sofort, daß die iterierte Substitution durch

$$x' + i y' = i^2(x + i y)$$

dargestellt wird, also eine Gleichung derselben Form, wo nur der Faktor i^2 an Stelle von i eingetreten ist, und ebenso tritt bei mehrfacher Wiederholung allgemein i^w ein, wo w schließlich jede beliebige reelle Zahl sein kann. Also wird aus der Einheitsdrehung (2) bei w-maliger Wiederholung

$$x' + i y' = i^w(x + i y) \qquad (3)$$

und das ist daher die <u>analytische Darstellung der Drehung der Ebene um 0 durch den Winkel w R.</u>

Nun wollen wir annehmen, daß wir aus der Analysis die Exponentialfunktion e^z kennen und ebenso die trigonometrischen Funktionen $\cos z$, $\sin z$ in ihrer abstrakt analytischen Definition durch die Formel

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

(ohne daß wir von ihrer geometrischen Bedeutung vorläufig eine Ahnung haben). Dann kennen wir auch die Zahl π durch die Formel $e^{i\pi} = -1$ und haben daher

$$i = e^{\frac{i\pi}{2}}$$

$$i^w = e^{w\frac{i\pi}{2}} = \cos\frac{w\pi}{2} + i \sin\frac{w\pi}{2}.$$

Führen wir das in (3) ein, und trennen reellen und imaginären Bestandteil, so wird:

$$(4) \qquad \begin{cases} x' = \cos\frac{w\pi}{2} \cdot x - \sin\frac{w\pi}{2} \cdot y, \\ y' = \sin\frac{w\pi}{2}\, x + \cos\frac{w\pi}{2}\, y, \end{cases}$$

und das ist also in mehr elementaren analytischen Symbolen die gesuchte Darstellung der Drehungsgruppe.

Es liegt nun nach diesem Resultat nahe, den <u>rechten Winkel nicht als Einheit, sondern als Winkel $\frac{\pi}{2}$ zu wählen</u>; wir werden das die <u>natürliche Winkelskala</u> nennen, so wie wir vom natürlichen Logarithmus reden, um anzudeuten, daß diese Begriffe in der Natur der Dinge liegen, ohne daß man doch ohne weiteres darauf kommt. In dieser natürlichen

Skala haben wir statt $\frac{\omega\pi}{2}$ einfach ω zu schreiben, und erhalten statt (4) als Formeln der Drehung die allbekannten Formeln:

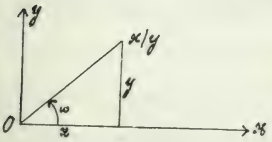
$$(5)\qquad \begin{aligned} x' &= \cos\omega \cdot x - \sin\omega\, y \\ y' &= \sin\omega \cdot x + \cos\omega\, y, \end{aligned}$$

Wir haben nun zu untersuchen, was in dieser Formel an geometrischen Wahrheiten alles enthalten ist. Es werden das alle die Elementartheoreme sein, die man gewöhnlich vorausschickt, um dann auf ihnen die Formeln (5) aufzubauen:

1.) Wir mögen zunächst den Punkt der x-Achse im Abstand r vom Anfangspunkt betrachten: $x = r, y = 0$. Drehen wir ihn nun den Winkel ω, so liefern die Formeln (5) als Koordinaten seiner neuen Lage:

$$(6)\qquad \begin{cases} x = r\cos\omega \\ y = r\sin\omega, \end{cases}$$

die Akzente an den Koordinaten des neuen Punktes sind dabei der Kürze halber fortgelassen. Nehmen wir nun, um die Ideen zu fixieren, $\omega < \frac{\pi}{2}$ und betrachten das rechtwinklige Dreieck, das vom Radiusvektor r des Punktes $x|y$, seiner Abszisse x und Ordinate y gebildet wird, so enthalten die Formeln (6) den Zusammenhang seiner Seiten und des Winkels ω. Wegen der Re-



lation $\cos^2 w + \sin^2 w = 1$, die aus den hier zu Grunde gelegten analytischen Definitionen dieser Funktionen folgt, ergibt sich aus (6) unmittelbar

$$(6^{\alpha}) \qquad \underline{x^2 + y^2 = r^2},$$

und das ist der pythagoräische Lehrsatz, den wir so also als Folge unserer Annahmen über die Bewegungen der Ebene erhalten. Weiter aber können wir (6) umschreiben in

$$(6^{b}) \qquad \cos w = \frac{x}{r} \qquad \sin w = \frac{y}{r},$$

und das ist die elementare trigonometrische Bedeutung unserer Winkelfunktionen, die man sonst geradezu zu ihrer Definition verwendet: Cosinus und Sinus sind das Verhältnis von anliegender und gegenüberliegender Kathete zur Hypotenuse.

2.) Wir können nun leicht die allgemeinen analytischen Ausdrücke der Grundbegriffe Entfernung und Winkel angeben, indem wir die gegebenen Elemente, Punkte oder Gerade, durch Verschiebung und Drehung in die soeben betrachtete spezielle Lage bringen. Einmal ergibt sich so für die Entfernung zweier Punkte $x_1 | y_1$ und $x_2 | y_2$

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2};$$

denn man braucht nur durch Parallelverschiebung den Punkt 2 in den Koordinatenanfang zu bringen, so werden nach den Verschiebungsformeln (s. 338) $x_1 - x_2, y_1 - y_2$

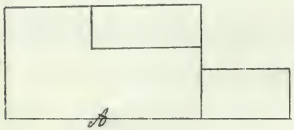
die neuen Koordinaten des Punktes 1, und aus (6^{a}) folgt sofort unser Ausdruck für x. Ganz ähnlich folgt – ich brauche das hier wohl nicht im einzelnen auseinanderzusetzen – aus (6^{b}) für den Winkel ω irgend zweier Geraden mit den Gleichungen $\alpha_1 x + \beta_1 y + \delta_1 = 0$, $\alpha_2 x + \beta_2 y + \delta_2 = 0$:

$$\begin{cases} \cos\omega = \dfrac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}} \\ \sin\omega = \dfrac{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}} \end{cases}$$

3.) Wir müssen nun noch vom Begriffe des Flächeninhaltes reden, und bemerken zunächst, daß wir von ihm bisher bei dem Aufbau der Geometrie noch nicht den mindesten Gebrauch gemacht haben. Trotzdem ist dieser Begriff, wenn auch in mehr oder weniger unexakter Form, im naiven räumlichen Bewußtsein eines jeden Menschen enthalten; jeder Bauer weiß, was es heißt, daß ein Stück Land so und soviel Quadratmeter Inhalt hat. Wenn wir nun auch die Geometrie vollkommen fundamentiert haben – und das ist tatsächlich im Vorhergehenden geschehen – ohne von diesem Grundbegriff Gebrauch gemacht zu haben, so werden wir ihn doch jetzt nachträglich an das System anschließen, d. h. ihn in Koordinaten ausdrücken müssen.

Wir müssen da mit einer kleinen geometrischen Betrachtung beginnen, wie sie ungefähr ebenso bei Euklid

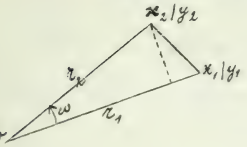
und in den elementaren Darstellungen der Geometrie stets angestellt wird. Haben wir ein Rechteck von den Seiten



A, B, so definieren wir als seinen Inhalt das Produkt $A \cdot B$. Fügen wir ferner 2 Rechtecke oder überhaupt 2 Figuren bekannten Inhaltes zusammen, so entsteht eine Figur, die die Summe der Inhaltszahlen zum Inhalt haben soll; ziehen wir von einem Rechteck oder sonst einer Figur ein kleineres ganz in ihr gelegenes Stück ab, so soll der Rest die Differenz der Inhaltszahlen zum Inhalt haben.

Von diesen Festsetzungen aus gelangt man sofort zur Angabe des Inhaltes eines Parallelogrammes. Es

entsteht aus einem Rechteck von gleicher Grundlinie und Höhe, indem man ein Dreieck fortnimmt und ein Kongruentes hinzufügt; daher soll sein Inhalt gleich dem Rechtecksinhalt sein, also gleich dem Produkt von Grundlinie und Höhe. Durch eine Diagonale zerfällt das Parallelogramm in 2 kongruente Dreiecke, deren jedes also den halben Parallelogrammin halt zum Inhalt hat: Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus Grundlinie und Höhe.



Wenden wir das auf ein Dreieck mit den Seiten r_1, r_2 und dem eingeschlossenen Winkel ω an, so ist die Höhe auf r_1 gleich $r_2 \sin\omega$ und daher der Inhalt

$$\Delta = \frac{r_1 r_2 \sin\omega}{2} .$$

Legen wir die eine Ecke dieses Dreiecks in den Koordinatenanfang und bezeichnen die Koordinaten der anderen beiden Ecken mit $x_1 | y_1$ und $x_2 | y_2$, so läßt sich diese Formel mit Hilfe der obigen Ausdrücke für Entfernung und Winkel leicht umrechnen

$$\Delta = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2} .$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Drehungen des Koordinatensystemes dieses Δ ungeändert lassen, so daß tatsächlich ein „geometrischer Begriff" dadurch zum Ausdruck kommt. Um auch Invarianz bei Verschiebungen und also auch bei allen Bewegungen zu haben, muß man auch die dritte Ecke mit transformieren, d. h. die Formel für den Inhalt eines aus drei beliebigen Punkten $x_1 | y_1$, $x_2 | y_2$, $x_3 | y_3$ gebildeten Dreiecks aufstellen; man erhält dann

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} ,$$

und das ist ja die Formel, mit der wir diese Vorlesung begonnen hatten (s. S. 6). Man kann nun leicht be-

stätigen, dass sich die so definierten Dreiecksinhalte bei Aneinanderfügung oder Teilung von Dreiecken addieren oder subtrahieren; das kommt, wie wir ja früher schon sahen, auf einfache Determinantenrelationen heraus.

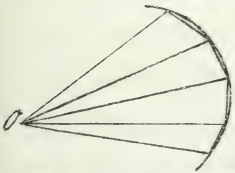
Damit ist der Anschluss der Inhaltsidee an unser System der analytischen Geometrie vollzogen und wir haben gleichzeitig etwas gewonnen, was in der naiven Auffassung zunächst noch nicht enthalten ist: der Inhalt ist eine mit Vorzeichen behaftete Grösse geworden. Was für ein Vorteil hinsichtlich des freien Operierens mit den Formeln und ihrer ausnahmslosen Gültigkeit damit gegenüber der naiven Auffassung des Inhalts als absoluter Grösse erzielt ist, das habe ich ja gerade am Anfange dieser Vorlesung ausführlich auseinandergesetzt (Vgl. S. 14 ff.)

4) Ein weiteres Beispiel für einen in der naiven Raumvorstellung mehr oder weniger praeziz enthaltenen Begriff, den wir jetzt erst nachträglich an unser System der Geometrie anschliessen müssen, ist der Begriff der (willkürlichen) Kurve. Was eine Kurve ist, glaubt jeder Mensch zu wissen, bis er soviel Mathematik gelernt hat, dass ihm die unzähligen möglichen Abnormitäten verwirrt gemacht haben; eine gute Orientierung gibt auch auf diesem Gebiete das einschlä-

gige Encyklopädiereferat von v. Mangoldt: Die Begriffe „Linie" und „Fläche" (III A. B 2). Wir wollen uns hier indessen um Einzelheiten nicht kümmern und einfach sagen, eine Kurve ist die Gesamtheit der Punkte, deren Koordinaten solche Funktionen φ, χ eines Parameters t sind, die so oft differenzierbar sein sollen, wie man es nur irgend braucht:

$$x = \varphi(t) \qquad y = \chi(t).$$

Dann kann man im Rahmen unserer analytischen Geometrie sofort alle die Begriffe und Sätze entwickeln, die man gewöhnlich unter dem Namen Infinitesimalgeometrie zusammenfaßt, die Begriffe von Bogenlänge, krummlinigem Flächeninhalt, Krümmung, Evolute et c.



Die Grundidee ist immer, daß man die Kurve als Grenze eines eingeschriebenen geradlinigen Polygons auffaßt; sind die Koordinaten zweier aufeinanderfolgender Punkte x, y und $x + dx, y + dy$, so folgt aus der pythagoräischen Formel sofort für die Bogenlänge

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

und ebenso folgt aus der früheren Formel für den Inhalt eines Dreieckes mit der Spitze in O sofort für den Flächeninhalt des Sektors zwischen Kurve und 2 Radienvektoren nach O:

$\frac{1}{2}\int(x\,dy - y\,dx)$

Ich verlasse damit unseren ersten Aufbau der Geometrie, dessen Charakteristikum war, daß wir die Existenz und Gliederung der dreiparametrigen Bewegungsgruppe an die Spitze stellten und dann sogleich Koordinaten einführten, um weiterhin unsere Schlüsse ganz im Gebiete der Arithmetik abmachen zu können. Diesem Aufbau ist

2. Eine zweite Art der Grundlegung der Geometrie

gewissermaßen entgegengesetzt, die gleichfalls direkt zur metrischen Geometrie führt und von jeher eine große Rolle gespielt hat; auf sie will ich daher auch noch eingehen.

Der Gegensatz zum ersten Systeme besteht darin, daß jetzt der Begriff der Bewegung gerade konsequent vermieden oder doch erst nachträglich herangebracht wird. Wenn man diese Umstellung im Altertum, wie auch heute noch vielfach bevorzugte, so waren dabei wohl zum Teil philosophische Ueberlegungen maßgebend, auf die ich hier wenigstens kurz hinweisen will. Man fürchtete mit den Bewegungen in die Geometrie ein ihr fremdes Element, die Zeit, hineinzubringen; und konnte man versuchen, das Vorausstellen der Bewegungen mit der großen Anschaulichkeit der Idee des starren Körpers zu rechtfertigen, so kann dagegen der

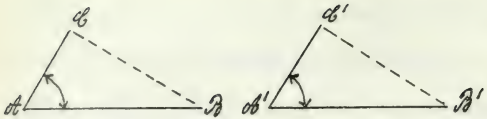
Einwand, daß diese Idee an sich gar keinen praezis faßbaren Sinn habe, sondern gerade umgekehrt erst begründet werden könne, wenn man schon vorher den Begriff der Entfernung besitzt. Dem wird der Empirist freilich immer entgegenhalten können, daß tatsächlich die abstrakte Idee der Entfernung erst aus dem Vorhandensein „hinreichend" starrer Körper entnommen sei.

Doch nun lassen Sie mich in Kürze die Hauptgedanken des neuen zweiten Aufbaues der Geometrie andeuten. Man beginnt da, genau wie früher

1.) mit der Einführung von Punkten und Geraden und den Sätzen über ihre Verknüpfung, Anordnung, Stetigkeit.

2.) Nun werden aber sogleich einerseits die Entfernung zweier Punkte (Strecke), andererseits der Winkel zweier Geraden als neue Grundbegriffe herangezogen, und Axiome über sie aufgestellt, die im wesentlichen aussagen, daß sich Strecke und Winkel in bekannter Weise durch Zahlen messen lassen.

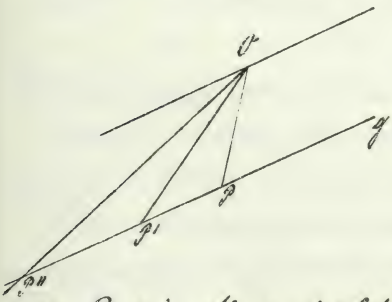
3.) Als charakteristisches die Axiome über die Bewegungsgruppe eigentlich ersetzendes Axiom tritt nun der erste Kongruenzsatz auf: Haben zwei Dreiecke 2 Seiten und den eingeschlossenen Winkel gemein, so sind sie kongruent, d. h. sie stimmen in allen



Stücken überein. In unserem früheren Systeme ist das ein beweisbarer Satz, man kann eine Bewegung angeben, die die Seite $A'B'$ mit AB zur Deckung bringt, dann fällt wegen der Voraussetzung notwendig auch $A'C'$ mit AC zusammen, und die Dreiecke kommen überhaupt zur Deckung. Wenn wir aber Bewegungen nicht unter die Grundbegriffe aufnehmen und daher nicht benützen dürfen, so gibt es keine Möglichkeit, diesen Satz zu beweisen, und wir müssen ihn notwendig als neues Axiom postulieren.

4.) Im weiteren Verfolg wird man nun genau umgekehrt vorgehen, als bei unserem ersten Aufbau, wie Ihnen das ja wohl allgemein bekannt ist, der ebenen Euklidischen geometrischen Unterricht geht ja - im wesentlichen im Anschluß an Euklid, von dem ich später noch näher zu reden haben werde - ganz diesen Weg. Man wird zunächst den pythagoräischen Satz zu beweisen versuchen, und wird dann die trigonometrischen Funktionen cos, sin usw. in ihrer Bedeutung in der Dreieckslehre einführen; von da kommt man dann schließlich zu demselben analytischen Apparat, den wir vorhin auf jenem anderen Wege abgeleitet haben.

5.) Dabei wird aber noch die Aufstellung eines weiteren besonders wichtigen Axiomes nötig, das die Theorie der Parallelen betrifft. Bei unserem früheren Aufbau war der Parallelismus einer der ersten Grundbegriffe, der sofort bei Betrachtung der Verschiebungen auftrat: Parallel hießen gerade Linien, wenn sie Bahnkurven derselben Verschiebung waren. Ganz anders hier; wir haben bisher gerade die wichtigsten Grundbegriffe der Geometrie mit Ausnahme des Parallelismus eingeführt, und diesen werden wir jetzt erst nachträglich definieren. Haben wir nämlich eine Gerade g und einen Punkt O außerhalb, so verbinden wir O mit einem Punkte P von g und lassen P durch die Lagen P', P'' ... immer weiter auf g hinausrücken (d. h. wir fassen die Punktfolge P, P', P'' ... bezw. die Folge der Geraden OP, OP', OP'' ... auf – von Bewegung im früheren Sinne ist hier nicht die Rede). Nun dreht sich dabei der Strahl OP um O, und er wird eine Grenzlage erreichen, wenn sich P ins Unendliche entfernt; diese Grenzgerade bezeichnen wir als eine Parallele durch O zu g. Dabei erscheint es von vornherein keineswegs nötig, daß sich OP der-



selben Grenzlage nähert, wenn P nach den beiden verschiedenen Seiten ins Unendliche geht, und es ist so die abstrakte Möglichkeit der Existenz zweier von einander verschiedener Parallelgeraden durch O zu g gegeben.

Darum ist es bei unserem jetzigen Aufbau ein neues Axiom, wenn wir gemäss unserer gewohnten Anschauung postulieren, es sollen stets jene beiden Grenzlagen zusammenfallen, d. h. es soll nur eine Parallele durch einen Punkt O zu einer Geraden g geben. Das ist das berühmte Parallelenaxiom über das seit vielen Jahrhunderten so viel gestritten worden ist; man nennt es auch wohl schlechtweg das Euklidische Axiom, da es bei Euklid ausdrücklich als Postulat formuliert wird.

Ich muss Ihnen wohl zunächst einiges zur Geschichte dieses Axioms berichten. Ein erstes Stadium der Entwicklung war, dass man immer wieder die grössten Anstrengungen machte, das Axiom zu beweisen, d. h. es auf die vorhergehenden Axiome zurückzuführen, stets freilich vergeblich. Natürlich haben diese Bemühungen auch heute noch nicht aufgehört; denn die Wissenschaft kann fortschreiten soweit sie will, es wird immer wieder Leute geben, die es besser zu verstehen meinen, und die die Resultate der exakten Forschung

ignorieren. Hier ist man nämlich von jenen vergeblichen Versuchen längst schon zu fruchtbaren neuen Untersuchungen und positiven Resultaten vorgeschritten; schon im 18. Jahrhundert tritt die charakteristische neue weiterführende Fragestellung auf: Ist es nicht möglich ein logisch konsequentes widerspruchsfreies System einer Geometrie aufzubauen, die von jenem Parallelenaxiom absieht, und die Existenz zweier verschiedener Grenzgeraden im oben besprochenen Sinne, d. h. zweier verschiedener Parallelen durch O zu g zulässt? Am Anfange des 19. Jahrhunderts konnte man diese Frage bejahen, und es war Gauß, der als erster die Existenz einer „Nichteuklidischen Geometrie" – so nennen wir mit ihm ein geometrisches System jener Art – entdeckte; aus seinem Nachlaß geht hervor, daß er sie 1816 gewiß bereits genau gekannt hat; die betr. Manuskripte sind freilich erst spät aufgefunden und 1900 im Bd. VIII der gesammelten Werke gedruckt worden.[1] Gauß selbst hat außer wenigen gelegentlichen Äußerungen nichts über diese seine große Entdeckung veröffentlicht. Die ersten Publikationen einer Nichteuklidischen Geometrie rühren von dem Russen N. I. Lobatschefskij (1829) und dem Ungarn J. Bolyai de Bolya dem

1) Leipzig 1900. Der betr. Teil ist von P. Stäckel herausgegeben.

Jüngern (1832) her,[1] die beide unabhängig diese Resultate gefunden hatten und sie übrigens nachweisbar schon 1826 bez. 1823 besaßen. Im Laufe des Jahrhunderts sind dann durch vielfache Arbeiten diese Dinge Allgemeinbesitz der Mathematiker geworden, und heut hat wohl sogar jeder allgemein Gebildete schon einmal etwas von der Existenz einer Nichtenklidischen Geometrie gehört, wenn auch ein klares Verständnis für sie doch nur der Fachmann erreichen kann.

Eine wesentlich neue Wendung hat weiterhin noch am Anfange der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts Riemann dieser Sache gegeben, nämlich in seinem Habilitationsvortrage über die Hypothesen, die der Geometrie zu Grunde liegen im Jahre 1854.[2] Er bemerkt, daß allen vorangehenden Untersuchungen die Annahme einer unendlichen Länge der Geraden zu Grunde liegt, die ja gewiß äußerst naturgemäß und naheliegend ist. Wie nun aber, wenn man auch auf diese Annahmen

1) Deutsch übers. i. d. „Urkunden zur Geschichte der Nichtenklidischen Geometrie" von Engel und Stäckel. Bisher erschienen Teil 1 (Lobatschefskij) von Engel. – Leipzig 1898. Vgl. auch die „Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichtenklidischen Geometrie" von Stäckel und Engel. Leipzig 1895.

2) Publiziert in Bd. XIII der Abh. d. Ges. d. W. zu Göttingen = Ges. mathem. Werke. 2. Aufl. (Leipzig 1892) pg. 272 ff.

verzichten will, wenn man etwa zuläßt, daß die Geraden so in sich zurücklaufen, wie die größten Kreise einer Kugel? Es handelt sich hier um den Unterschied zwischen Unendlichkeit und Unbegrenztheit des Raumes, der ja im Beispiel am besten zu verstehen ist: Unbegrenzt ist sowohl die gewöhnliche Ebene als die Kugeloberfläche, aber nur die erstere ist unendlich, während die andere eine endliche Ausdehnung hat. Riemann nimmt nun den Raum nur unbegrenzt und nicht unendlich an, wodurch die Gerade eine geschlossene Kurve wird, auf der die Punkte wie auf einem Kreise angeordnet sind; läßt man jetzt einen Punkt P auf einer Geraden g, wie oben in bestimmter Richtung immer weiter laufen, so wird er schließlich wieder zum Ausgangsort zurückkehren und der Strahl O P wird überhaupt keine Grenzlage haben: Es gibt überhaupt keine parallele Gerade mehr. So tritt bei Riemann eine zweite Art nichteuklidischer Geometrie („ N. G. II ") der nichteuklidischen Geometrie von Gauß, Bolyai und Lobatschefskij („ N. G. I ") entgegen.

Das scheint zunächst etwas paradox, aber der Mathematiker bemerkt hier sofort eine Analogie zur gewöhnlichen Theorie der quadratischen Gleichungen, die den Weg zum Verständnisse der Sache weist. Eine

quadratische Gleichung hat nämlich entweder 2 verschiedene reelle Wurzeln oder keine reelle Wurzeln (sondern 2 imaginäre) oder endlich - als Uebergangsfall - eine doppelt zählende reelle Wurzel; das ist ganz analog den 2 verschiedenen reellen Parallelen der A. G. I, dem Fehlen reeller Parallelen in der A. G. II, und endlich dem Uebergangsfall einer auf zwei Weisen als Grenzlage zu definierenden Parallelen in der Euklidischen Geometrie.

Bevor ich nun genauer auf die mathematische Behandlung der nichteuklidischen Geometrie eingehe, will ich wenigstens kurz auch ihre grosse Bedeutung nach philosophischer Seite hin streifen, vermöge deren sie bei den Philosophen stets grosses Interesse, vielfach aber auch scharfe Ablehnung gefunden hat.

Vor allem gibt jene Disziplin darüber Auskunft, welchen Charakter die geometrischen Axiome vom Standpunkte der reinen Logik aus betrachtet haben. Man kann nämlich unmittelbar aus der Existenz der nichteuklidischen Geometrie schliessen, dass das Euklidische Axiom keine Folge der vorausgestellten Grundbegriffe und Sätze ist, und dass auch sonst erst recht kein logischer Zwang zu seiner Annahme besteht; denn substituiert man nur an seiner Stelle eine andere

ihm widersprechende Annahme, während man alle anderen Axiome beibehält, so wird man auf keinen Widerspruch geführt und es ergibt sich die nichteuklidische Geometrie als ein logisch ebenso korrektes Lehrgebäude, wie es die euklidische ist. Diese Einzelheiten unserer Raumvorstellung, wie das Parallelenaxiom, sind also jedenfalls keine rein logischen Notwendigkeiten.

Es fragt sich nun, ob man denn nicht anschauungsgemäß über die Richtigkeit des Parallelenaxioms entscheiden kann, und auch hier gibt die nichteuklidische Geometrie wichtige Aufschlüsse. Es ist nämlich gewiß nicht wahr, daß uns die unmittelbare sinnliche Anschauung die Existenz genau einer Parallelen lehrt. Denn unsere Raumwahrnehmung besitzt durchaus keine absolute Genauigkeit, sondern hier wie in jedem anderen Gebiete sinnlicher Wahrnehmung können wir Größen (Strecken, Winkel etc. etc.), deren Unterschied unter einer gewissen Grenze, der sog. Schwelle, liegt, nicht mehr als verschieden auffassen. Legen wir also insbesondere durch den Punkt O äußerst nahe aneinander 2 Gerade, so kann man sie nicht mehr von einander unterscheiden, wenn man nur ihren Winkel kleiner genug, 1" oder, wenn man will, $\frac{1}{1000}$" oder noch kleiner nimmt.

Es wird also schwer sein, aus der Anschauung zu entnehmen, ob es denn wirklich nur genau eine Parallele durch O zu g gibt, oder zwei nur um einen solchen kleinen Winkel von einander abstehende. Man wird das noch deutlicher empfinden, wenn man sich O von g ungeheuer weit entfernt denkt, sagen wir eine oder gar Billionen Sirius-weiten; bei solchen Distanzen verliert die Anschauung ganz die Schärfe, die man ihr sonst zutraut, und man wird gewiss nicht mehr deutlich vor Augen sehen können, ob es da entsprechend der Definition der Parallelen als Grenzlage eines sich drehenden Strahles eine oder zwei Parallelen zur gegebenen Geraden g gibt. Dieser Sachlage fügt sich nun die nichteuklidische Geometrie 1. Art tatsächlich ebenso gut ein wie die euklidische; wie dies aus dem sogleich mitzuteilenden mathematischen Formelwerk deutlicher hervorgehen wird, enthält sie noch eine willkürliche Konstante, und indem man über diese passend verfügt, kann man den Winkel zwischen beiden Parallelen zu g durch einen von g mäßig abstehenden Punkt O beliebig klein machen, und erst in dem Maße, wie sich O von g entfernt, wird der

Winkel dann merklich. Insofern es also wahr ist, daß sich unsere Raumanschauung nur auf ein begrenzter Raumstück mit begrenzter Genauigkeit bezieht, kann man ihr durch eine V. G. I beliebig genau entsprechen.

Ganz ähnlich ist es aber auch mit der V. G. II. Wir müssen uns da darüber klar werden, daß auch die unendliche Länge der Geraden nicht aus der unmittelbaren Anschauung zu entnehmen ist. Wir können jede Gerade immer nur in einem endlichen Raumstücke verfolgen, und daher kann es der Wahrnehmung nicht widersprechen, wenn wir sagen, die Gerade hat eine zwar ungeheuer große aber doch eine endliche Länge, vielleicht Billionen oder mehr Sirriusweiten; die Phantasie kann sich hier ja beliebig große Zahlen ausdenken, die über jede Anschauung hinausgehen. Gemäß diesen Ueberlegungen kann man auch durch die V. G. II, die wieder einen willkürlichen Parameter enthält, die Verhältnisse in jedem begrenzten Raumstück beliebig genau darstellen.

Die hier berührten logischen und anschaulichen Tatsachen, wie sie sich vom Standpunkte der Mathematik aus darbieten, laufen freilich in hohem Maße jener orthodoxen Raumauffassung zuwider, die viele Philosophen an den Namen Kants anknüpfen und

wieder alle Sätze der Geometrie absolute Gültigkeit haben sollen. Daher erklärt sich die Aufregung und der Widerstand, die die Nichteuklidische Geometrie bei ihrem Bekanntwerden in allen philosophischen Kreisen hervorgerufen hat.

Wollen wir nun endlich zur eigentlich mathematischen Behandlung der nichteuklidischen Geometrieen uns wenden, so werden wir am Besten den Weg durch die projektive Geometrie nehmen; es ist das die Ableitung, die ich in Band IV der mathem. Ann. [1] gegeben habe.

Wir denken uns die projektive Geometrie unabhängig von jeder Metrik so aus den Grundbegriffen Punkt, Gerade, Ebene und ihren Axiomen der Verknüpfung, Anordnung und Stetigkeit aufgebaut, wie ich das am Anfang dieser Auseinandersetzungen über die Grundlagen der Geometrie (S. 325 ff.) kurz angedeutet habe; insbesondere seien auch Punktkoordinaten x, y, z oder homogen $\xi : \eta : \zeta : \tau$ und ebenso Ebenenkoordinaten $\alpha : \beta : \gamma : \delta$ eingeführt, wobei dann das Aufeinanderliegen von Punkt und Ebene durch die bilineare Gleichung $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + \delta\tau = 0$ gegeben ist.

Auf dieser Grundlage konnten wir dann nachträg-

1) 1871. „Über die sog. Nicht-Euklidische Geometrie" pag. 573 ff.

lich die gewöhnliche euklidische Geometrie gemäß unserer früheren invariantentheoretischen Systematik auf Grund des Cayleyschen Prinzipes erhalten, indem wir die spezielle in Ebenenkoordinaten geschriebene quadratische Form

$$\Phi_0 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

adjungierten, die gleich Null gesetzt, den imaginären Kugelkreis vorstellt. Der Winkel zweier Ebenen

$$\omega = \arccos \frac{\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2}\ \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2}}$$

und die Entfernung zweier Punkte

$$r = \frac{\sqrt{(\xi_1 \tau_2 - \xi_2 \tau_1)^2 + (\eta_1 \tau_2 - \eta_2 \tau_1)^2 + (\zeta_1 \tau_2 - \zeta_2 \tau_1)^2}}{\tau_1 \ \tau_2}$$

waren dann, wie wir gezeigt hatten (S. 317ff), einfache simultane Invarianten der gegebenen Figur (eben der 2 Ebenen oder der 2 Punkte) und der Form Φ_0.

Ganz ähnlich wollen wir nun zur nichteuklidischen Geometrie gelangen; wir nehmen nur statt des Kugelkreises $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$ eine andere quadratische Form, die dieser „benachbart" ist, nämlich:

$$\Phi = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \varepsilon \cdot \delta^2 .$$

Hier sei ε ein Parameter, den man beliebig klein wählen kann, und für $\varepsilon = 0$ wird $\Phi = \Phi_0$; unser Ansatz wird so sein, daß bei positivem ε die *N. G. I*, bei negativem ε die *N. G. II* entsteht, während für $\varepsilon = 0$ die obigen Formeln der gewöhnlichen euklidischen Geometrie um-

faßt werden. Wesentlich bei der Aufstellung dieser Form Φ ist, daß ihre Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon \end{vmatrix} = -\varepsilon$$

im allgemeinen von Null verschieden ist; nur im speziellen Falle $\varepsilon = 0$, also beim Kugelkreis verschwindet sie. Unser Ansatz kommt also darauf hinaus, daß wir die quadratische Form verschwindender Determinante durch eine solche von nicht verschwindender positiver oder negativer (aber dem absoluten Werte nach beliebig kleiner) Determinante ersetzen.

Die Maßgrößen unserer nichteuklidischen Geometrien werden wir nun erhalten, indem wir ganz analoge Invarianten aus der allgemeinen Form Φ und der Figur zweier Ebenen bezw. zweier Punkte bilden, wie sie die vorhin angegebenen euklidischen Größen für die spezielle Form $\Phi_0 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ darstellen. Das ist nichts, als die von Cayley[1] 1859 begründete Auffassung, daß man in Bezug auf irgend eine quadratische Fläche (z. B. die Fläche $\Phi = 0$) ebensogut eine Maßbestimmung definieren kann, wie in Bezug auf den Kugelkreis. Bei der Kürze Zeit, auf die

1) In demselben (S. 281) erklärten „sixth memoir upon quantics."

dieser Exkurs hier naturgemäß beschränkt sein muß, ist es am zweckmäßigsten, die analytischen Formeln definitionsweise voranzustellen; so läßt sich die Sachlage am raschesten präzis aussprechen und jeder Schatten von etwas Geheimnisvollem wird vermieden. Freilich kann diese Darstellung zum vollen Verständnis des Stoffes nur führen, wenn man ihm hinterher noch genau geometrisch durcharbeitet, wie Sie das gerade in meiner bereits genannten Arbeit in Bd. IV der math. Ann. finden.

Betrachtet man zunächst 2 Ebenen, so liegt es ganz nahe, wie man den Ausdruck ihres „in Bezug auf die Fläche $\Phi = 0$ gemessenen Winkels" in Verallgemeinerung des obigen Winkelausdruckes auszusetzen hat; man bildet genau wie dort aus den Werten der Polarform von Φ und dieser Form selbst

$$\omega = \arccos \frac{\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 - \varepsilon \delta_1 \delta_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 - \varepsilon \delta_1^2}\ \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 - \varepsilon \delta_2^2}},$$

und hat so einen offenbar invarianten Ausdruck, der für $\varepsilon = 0$ tatsächlich in den Winkel der Euklidischen Geometrie übergeht.

Nicht so unmittelbar klar ist es, wie man den Ausdruck der Entfernung zweier Punkte auf unsere Maßbestimmung übertragen soll, und zwar liegt die Schwierigkeit der Uebertragung darin, daß wir jetzt eine Form mit nichtverschwindender Determinante statt der für

die Euklidische Maßbestimmung maßgebenden Form Φ_0 mit verschwindender Determinante verwenden. Wir können aber den Weg zur Aufstellung des Entfernungsausdruckes so finden, daß wir genau dualistisch zur soeben gegebenen Definition des Winkels vorgehen. Wir stellen also zunächst die Gleichung der Fläche $\Phi = 0$ in Punktkoordinaten auf, deren linke Seite $f(\xi, \eta, \zeta, \tau)$ bekanntlich durch Ränderung der Determinante Δ von Φ mit Punktkoordinaten entsteht:

$$f = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \xi \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \eta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon & \tau \\ \xi & \eta & \zeta & \tau & 0 \end{vmatrix} = \varepsilon(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - \tau^2 .$$

Nun übertragen wir genau den Ansatz von ω, indem wir den Quotienten aus der Polarform zu f und dem Produkt der Quadratwurzeln aus den Werten von f für die Punkte 1 und 2 bilden, und davon den Arcus cosinus nehmen:

$$r = k \cdot \arccos \frac{\varepsilon(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2) - \tau_1\tau_2}{\sqrt{\varepsilon(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2) - \tau_1^2}\,\sqrt{\varepsilon(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2) - \tau_2^2}} .$$

Der hinzugefügte Faktor k gestattet uns, eine beliebige Strecke der Einheit gleich zu machen, wie es unserer Gewöhnung entspricht und übrigens bei dem sogleich durchzuführenden Uebergang zur Euklidischen Geometrie sich als notwendig erweisen wird. Dabei muß man k bei negativem ε reell, bei positivem rein imaginär annehmen,

damit x reell ist für alle oder doch (bei $\varepsilon < 0$) wenigstens für ein gewisses Teilgebiet aller reellen Punkte, die dann das reelle Substrat der nichteuklidischen Geometrie bilden.

Damit wäre nun einmal eine allgemeine Definition der Entfernung gegeben; nachzuweisen bliebe nur, daß sie für $\varepsilon = 0$ auf den oben angegebenen Ausdruck der euklidischen Geometrie zurückführt. Das ist hier nicht so evident, wie vorhin beim Winkel w; denn setzen wir ohne weiteres $\varepsilon = 0$, so wird der Quotient 1, und $\frac{x}{i\kappa}$ ist daher bis auf das notwendig unbestimmt bleibende additive Vielfache von 2π gleich Null.

Wir können nun aber durch einen gewissen Kunstgriff trotz dieses zunächst etwas paradoxen Resultates doch schließlich zu dem euklidischen Ausdruck gelangen. Dann ist es bequem die Definitionsgleichung von x mit Hilfe der bekannten Gleichung $\arccos \alpha = \arcsin \sqrt{1-\alpha^2}$ etwas umzuformen; bringen wir bald auf einen Nenner, so wird

$$x = k \cdot \arcsin \sqrt{\frac{\{\varepsilon(\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2)-\tau_1^2\}\{\varepsilon(\xi_2^2+\eta_2^2+\zeta_2^2)-\tau_2^2\}-\{\varepsilon(\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2+\zeta_1\zeta_2)-\tau_1\tau_2\}^2}{\{\varepsilon(\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2)-\tau_1^2\}\{\varepsilon(\xi_2^2+\eta_2^2+\zeta_2^2)-\tau_2^2\}}}.$$

Nun kann man den Zähler leicht umsetzen; nach einer bekannten Determinantenrelation ist nämlich der Wert von f – d. i. die einmal geränderte Determinante Δ der Form Φ – für den Punkt 1, multipliziert mit dem für den Punkt 2, minus dem Quadrat der aus 1 und 2 gebildeten Polar-

Form gleich dem Produkt der Determinante Δ selbst und der zweimal mit den Koordinaten von 1 und 2 geänderten Determinante Δ, also gleich

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \eta_1 & \eta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \zeta_1 & \zeta_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon & \tau_1 & \tau_2 \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 & \tau_1 & 0 & 0 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & \tau_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} ,$$

rechnet man das aus, so wird es gleich

$$-\varepsilon \cdot \{(\xi_1\tau_2 - \xi_2\tau_1)^2 + (\eta_1\tau_2 - \eta_2\tau_1)^2 + (\zeta_1\tau_2 - \zeta_2\tau_1)^2 - \varepsilon(\eta_1\zeta_2 - \eta_2\zeta_1)^2 - \varepsilon(\zeta_1\xi_2 - \zeta_2\xi_1)^2 - \varepsilon(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)^2\}.$$

Wenn Determinantenrechnungen dieser Art unbequem sind, der mag durch direkte Rechnung die Identität dieses Ausdruckes mit der obigen Form des Zählers bestätigen.

Führen wir nun diesen Ausdruck oben ein, und lassen ε Null werden, so ergibt sich natürlich genau wie aus der ersten Form $\frac{\pi}{2} = \arcsin 0 = 0$, wegen des Faktors $\sqrt{-\varepsilon}$. Lassen wir ε aber zunächst noch nicht Null, sondern nur unendlich klein werden, so ist der Arcus-sinus in erster Annäherung gleich dem Sinus; im Zähler aber sind die drei mit ε multiplizierten Quadrate gegen die übrigen zu vernachlässigen, und ebenso fällt im Nenner in jedem Faktor der mit ε multiplizierte Term fort und es bleibt

$$\varkappa = k \cdot \sqrt{-\varepsilon} \cdot \frac{\sqrt{(\xi_1\tau_2 - \xi_2\tau_1)^2 + (\eta_1\tau_2 - \eta_2\tau_1)^2 + (\zeta_1\tau_2 - \zeta_2\tau_1)^2}}{\tau_1 \cdot \tau_2} .$$

Nun kommt der Kunstgriff: Wir erteilen k während des Grenzüberganges $\lim \varepsilon = 0$ keinen festen Wert, sondern lassen es gleichzeitig derart unendlich werden, daß

$$\lim (k \cdot \sqrt{-\varepsilon}) = 1$$

wird; zu dem Zwecke werden wir k natürlich durch rein imaginäre oder durch reelle Werte laufen lassen, je nachdem ε von positiven oder negativen Werten her gegen Null geht. Nun ist es ganz evident, daß durch diesen Grenzübergang tatsächlich der Entfernungsausdruck der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie (S. 369) herauskommt.

Denkt man sich nun in die geometrische Bedeutung der Form f sowie der nur analytisch hingestellten Ausdrücke hinein, so ergibt sich tatsächlich, daß man für $\varepsilon > 0$ gerade die nichteuklidische Geometrie erster Art, für $\varepsilon < 0$ die zweiter Art und für $\varepsilon = 0$ natürlich die Euklidische Geometrie vor sich hat, – ein Resultat, für dessen nähere Begründung ich allerdings hier nur auf meine mehrfach genannte Arbeit in Bd. IV. der Math. Ann. verweise. Ich erwähne nur noch, daß ich damals für diese 3 Geometrien die Namen hyperbolisch, elliptisch, parabolisch vorschlug, da die Existenz von zwei reellen bezw. imaginären bezw. einer doppelt zählenden Parallelen genau dem Verhalten der Asymptoten der 3 Arten von Kegelschnitten entspricht; diese Namen wer-

den Sie vielfach in der Literatur vorfinden.

Noch eine kurze Bemerkung lassen Sie mich machen, die sich auf den Vergleich mit unserem ersten Aufbau der Euklidischen Geometrie bezieht. Da gingen wir von der Bewegungsgruppe aus, das war die Gesamtheit der Kollineationen, die die Maßverhältnisse ungeändert lassen. Solche Kollineationen gibt es aber bei einer jeden Nichteuklidischen Geometrie auch. Eine allgemeine Fläche zweiter Ordnung hat 15 Glieder, also 9 wesentliche Konstante; in der allgemeinsten Raumkollineation sind 15 Parameter willkürlich, also gibt es noch 6-fach unendlich viele Kollineationen, die eine vorgegebene quadratische Form, z. B. unser Φ, in sich überführen, und das ist ja die Bedingung dafür, daß die von uns eingeführten Maßverhältnisse nicht verändert werden. Also gibt es auch in jeder nichteuklidischen Geometrie eine 6-fach unendliche Gruppe von „Bewegungen", die w und s ungeändert lassen; bleibt man in der Ebene statt im Raum, so würde sich die Parameterzahl wie früher auf 3 reduzieren.

Wir können also auch jede nichteuklidische Geometrie aufbauen, indem wir von der Existenz einer Bewegungsgruppe ausgehen, und es bleibt daher noch zu präzisieren, wieso wir durch unseren früheren Aufbau gerade ausschließlich zur Euklidischen Geometrie kamen. Das lag

nun natürlich daran, daß wir aus den Bewegungen speziell eine zweiparametrige (im Raum würde es heissen dreiparametrige) Untergruppe der sog. Parallelverschiebungen herausgriffen, die lauter Geraden zu Bahnkurven hatten; solche Untergruppen gibt es in keiner nichteuklidischen Geometrie, und indem wir ihre Existenz bald zu Anfang postulierten, schlossen wir alle nichteuklidischen Geometrieen von vornherein aus und behielten allein die eine Euklidische über.

Und nun lassen Sie mich diese speziellen Erörterungen über nichteuklidische Geometrie mit einigen – ich möchte sagen – Leitsätzen allgemeinerer Natur abschliessen:

1.) Hatte ich früher berichtet, daß man auf philosophischer Seite der nichteuklidischen Geometrie gegenüber vielfach noch nicht volles Verständnis entgegenbringt, so muß ich jetzt betonen, daß sie in der mathematischen Wissenschaft heutzutage ganz allgemein anerkannt ist; ja sie wird sogar für viele Zwecke, z. B. in der modernen Funktionentheorie, als ein äußerst bequemes Hilfsmittel gebraucht, um sich arithmetisch recht komplizierte Verhältnisse greifbarer vor Augen zu stellen.

2.) Jeder Gymnasiallehrer muß notwendig etwas von

der nichteuklidischen Geometrie kennen; denn sie gehört nun einmal zu den wenigen Teilen der Mathematik, die zum mindesten in einzelnen Schlagworten in weiteren Kreisen bekannt geworden sind, und nach der daher jeder Lehrer jeden Moment gefragt werden kann. In der Physik gibt es ja ungleich mehr solche Dinge - fast jede neue große Entdeckung gehört dahin - die in Schlagworten in jedermanns Munde sind und über die dann selbstverständlich jeder Lehrer unterrichtet sein muß: Man denke sich nur einen Lehrer der Physik, der über Röntgenstrahlen oder Radium nichts zu sagen weiß; einen viel besseren Eindruck würde auch der Mathematiker nicht machen, der auf Fragen über nichteuklidische Geometrie keine Auskunft geben kann!

3.) Demgegenüber möchte ich dringend davon abraten, im regulären Schulunterricht (d. h. außer solchen gelegentlichen Andeutungen auf Veranlassung interessierterer Schüler) nichteuklidische Geometrie zu bringen, wie das Enthusiasten immer wieder empfehlen. Wir wollen zufrieden sein, wenn das vorangehende Postulat nur immer erfüllt ist, und wenn andererseits die Schüler die euklidische Geometrie wirklich verstehen lernen; schließlich ist es ja auch in Ordnung, daß der Lehrer ein bischen mehr weiß, als der durchschnitt-

liche Schüler.

Ich will nun noch kurz über die Weiterentwicklung der modernen Wissenschaft berichten, die durch die Nichteuklidische Geometrie veranlaßt worden ist. Man knüpfte da vorzugsweise an das eine ihrer Resultate an, daß das Euklidische Parallelenaxiom von den voraufgehenden Axiomen der Geometrie logisch unabhängig ist (s. S. 364 f.), und entnahm daraus die Anregung, auch die andern geometrischen Axiome auf ihre gegenseitige logische Abhängigkeit oder Unabhängigkeit zu untersuchen. So entstand die sog. moderne geometrische Axiomatik, die in ihren Betrachtungen genau den Wegen folgt, die jene alten Untersuchungen gewiesen haben: man sieht zu, welche Teile der Geometrie sich ohne Anwendung gewisser Axiome aufbauen lassen, und ob man auch unter der Annahme des Gegenteiles eines einzelnen Axiomes zu einem logisch widerspruchsfreien Systeme einer sog. „Pseudogeometrie" gelangen kann.

Als wichtigstes hierhin gehöriges Werk habe ich Ihnen Hilberts „Grundlagen der Geometrie"[1]) zu nennen, dessen Hauptziel gegenüber früheren Untersuchungen es ist, in der angedeuteten Weise die Bedeutung der Stetigkeitsaxiome für die Geometrie festzustellen. Von dies

1) 3. Aufl. Leipzig und Berlin 1909.

zu erreichen, ist es natürlich vor allem nötig, das Axiomensystem der Geometrie so anzuordnen, daß die Stetigkeitssätze ganz ans Ende kommen, während sie für uns bisher immer bald am Anfang standen. So konnten wir ja auch bei der Ableitung der nichteuklidischen Geometrie nicht etwa den ersten Axiomenaufbau (S. 329 ff.) verwenden, der den Parallelenbegriff an die Spitze stellte, sondern wir mußten uns vor allem ein Axiomensystem verschaffen, von dem der größte Teil nichts von Parallelen enthielt und das Parallelenaxiom erst hinterher hinzukam, also das oben an zweiter Stelle eingeführte (S. 356 ff.) oder das System der projektiven Geometrie (S. 325 ff. und S. 365 ff.). Von der hiermit bezeichneten wesentlichen Abweichung abgesehen schließt sich das Hilbertsche Axiomensystem wesentlich dem in unserem zweiten Aufbau der Geometrie (S. 356 ff.) auch befolgten Gange der elementaren Geometrie an.

Auf dieser Basis untersucht nun Hilbert, wieweit man die Geometrie ohne Benutzung der Stetigkeitsaxiome aufbauen kann, und er umfaßt damit zugleich die „Pseudogeometrieen," in denen zwar alle anderen geometrischen Axiome, nicht aber mehr die Stetigkeitssätze gelten, das sind wesentlich die Tatsachen, die sich auf die eineindeutige Zuordnung der

Punkte einer Geraden zu den gewöhnlichen reellen Zahlen (ihren Abszissen) beziehen (vgl. S. 326 und 337). Ich kann hier auf den genaueren Gedankengang, sowie auf die weiteren von Hilbert bei diesen Untersuchungen gewonnenen interessanten Resultate über den logischen Zusammenhang gewisser geometrischer Theoreme und Axiome natürlich nicht eingehen; Sie mögen es auf Grund dieser wenigen orientierenden Bemerkungen bei Hilbert selbst nachlesen. Nur daran will ich noch erinnern, daß die im letzten Wintersemester [1] gelegentlich schon besprochene Hilbertsche Nichtarchimedische Geometrie hierhin gehört; das ist eben eine solche Pseudogeometrie, in der speziell das sog. Archimedische Stetigkeitsaxiom nicht mehr erfüllt ist, d. h. in der sich die Abszissen zweier verschiedener Punkte auch nur um eine „aktual unendlich kleine Größe" unterscheiden können, von der kein endliches Vielfache einer gewöhnlichen endlichen reellen Zahl gleich ist.

Diese kurzen Bemerkungen über die moderne Axiomatik möchte ich nicht abschließen, ohne noch wenige Worte zu der wichtigen Frage nach der eigentlichen wahren Natur der geometrischen Axiome und Sätze zu sagen – womit ich freilich aus der streng mathematischen Fragestellung hinüber in die psycho-

1) siehe Teil I, S. 476 – 479.

logisch-erkenntnistheoretische Klärung. Darüber ist man sich heute wohl allgemein einig, daß es sich hier um die obersten Begriffe und Sätze handelt, die man notwendig der Geometrie voran stellen muß, um überhaupt von ihnen aus rein logisch den mathematischen Beweisgang führen zu können. Aber mit dieser Feststellung ist die Frage noch nicht beantwortet, woher diese obersten Begriffe und Sätze denn eigentlich stammen. Da ist die alte Auffassung, daß sie in der Anschauung eines jeden Menschen ohne weiteres gegeben sind, daß sie von so evidenter Einfachheit sind, daß niemand an ihnen zweifeln kann. Diese Ansicht wurde aber durch die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie in hohem Maße erschüttert; denn diese zeigt ja gerade (vgl. S. 364 f. f.), daß die Raumanschauung und die Logik keineswegs zwingend das Euklidische Parallelenaxiom liefert, sondern daß man auch mit einer ihm widersprechenden Annahme zu einem logisch in sich geschlossenen und die tatsächlichen Verhältnisse mit hinreichender Annäherung darstellenden geometrischen System kommt. Wohl aber kann man jenes Parallelenaxiom immer noch als die einfachste Annahme aussprechen, die die räumlichen Verhältnisse darzustellen gestattet, und so wird es auch allgemein gelten, daß Grund-

Begriffe und Axiome nicht unmittelbar Tatsachen der Anschauung, sondern zweckmäßig gewählte Idealisierungen dieser Tatsachen sind. Schon der scharfe Begriff des Punktes existiert nicht in der unmittelbaren Anschauung, sondern er ist nur eine fingierte Grenze, der wir uns mit unseren Vorstellungen eines kleinsten Raumstückes nähern können, ohne sie doch je zu erreichen.

Demgegenüber findet man bei solchen Leuten, die sich nur für die logische und nicht für die anschauliche oder die allgemein-erkenntnistheoretische Seite der Sache interessieren, neuerdings häufig die Meinung, die Axiome seien nur willkürliche Sätze, die wir ganz freiwillig anerkennen, und die Grundbegriffe schließlich ebenso nur willkürliche Zeichen für Dinge, mit denen wir operieren wollen. Das Wahre daran ist natürlich, daß sich innerhalb der reinen Logik kein Grund für diese Sätze und Begriffe findet, und daß sie daher von anderer Seite - eben durch Einwirkung der Anschauung - geliefert oder angeregt werden müssen. Aber die Autoren drücken sich oft einseitiger aus, so daß wir in den letzten Jahren im Anschluß an die moderne Axiomatik geradezu wieder in diejenige Richtung der Philosophie hineingeraten sind, die man von Alters her Nominalismus nennt. Hier geht das Interesse an den

Dingen selbst und ihren Eigenschaften ganz verloren, nur wie man die Dinge nennt und nach welchem logischen Schema man mit den Namen operiert, davon wird noch geredet. Man sagt dann etwa, wir nennen den Inbegriff dreier Koordinaten einen Punkt, „ohne uns etwas dabei zu denken," und verabreden dann willkürlich gewisse Sätze, die über diese Punkte gelten sollen; man kann dabei ganz unbeschränkt beliebige Axiome aufstellen, wenn man nur den Gesetzen der Logik genügt und vor allem darauf achtet, daß sich in dem entstehenden Gebäude von Theoremen keine Widersprüche finden. Ich selbst teile diesen Standpunkt keineswegs, sondern halte ihn für den Tod aller Wissenschaft: die Axiome der Geometrie sind — wie ich meine — nicht willkürliche, sondern vernünftige Sätze, die im allgemeinen durch die Raumanschauung veranlaßt und in ihrem Einzelinhalt und Reihenfolge durch Zweckmäßigkeitsgründe reguliert werden.

Diesen philosophischen Exkursen, zu denen wir im letzten Abschnitt mehrfach uns veranlaßt sahen, möchte ich nun Erörterungen zur Geschichte der Geometrie, insbesondere der Auffassungen von dem geometrischen Grund lagen, entgegenstellen. Da ist gegenüber ähnlichen Betrachtungen, wie wir sie im vorigen Winter für die Ge-

biete der Algebra, Arithmetik, Analysis häufig angestellt haben, von vornherein einen grossen Unterschied zu bemerken. Diese Disziplinen haben in ihrer modernen Form eigentlich nur eine Geschichte von wenigen Jahrhunderten; sie beginnen mit dem Dezimalbruch- und Buchstabenrechnen, um eine runde Zahl zu nennen, ums Jahr 1500. Demgegenüber hat die Geometrie als selbständige Disziplin eine weit in das griechische Altertum zurückreichende Geschichte, und zwar hatte sie damals schon eine so hohe Entwicklungsstufe erreicht, dass man lange Zeit - bis in die Gegenwart hinein - in der griechischen Geometrie das Muster einer vollendeten Wissenschaft zu sehen glaubte. Dabei galt als Inbegriff griechischer Geometrie immer das hauptsächliche erhaltene systematische Lehrbuch, die vielberühmten Elementa (στοιχεῖα) des Euklid; es gibt wohl kaum ein zweites Buch, das in seiner Wissenschaft so lange Zeit hindurch eine solche Stellung behauptet hat. Noch heute muss sich jeder Mathematiker mit Euklid auseinandersetzen, und wir wollen ihm daher den letzten Abschnitt des gegenwärtigen Kapitels widmen:

3. Euklids Elemente.

Lassen Sie mich Ihnen zuerst die philologisch beste Ausgabe dieses Werkes vorlegen, die von J. L. Heiberg in

Kopenhagen bearbeitet ist [1]. Ihr ist die lateinische Uebersetzung des griechischen Textes beigegeben, was auch für die sehr nützlich ist, die Griechisch auf der Schule gelernt haben; denn Euklids Griechisch unterscheidet sich, besonders auch durch die Kunstausdrücke, wesentlich von dem Griechisch, das man auf der Schule treibt. Was Euklid-Kommentare angeht, so empfehle ich Ihnen besonders Zeuthens „Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter" [2] und Max Simons „Euklid und die 6 planimetrischen Bücher" [3]. Man wird am leichtesten in den Stoff eindringen, wenn man zuerst Simon, dann die allgemeinen Ausführungen Zeuthens und schließlich das Original vornimmt.

Von Euklid persönlich ist wenig bekannt; man weiß nur, daß er um 300 v. Chr. in Alexandrien lebte. Wohl aber wissen wir Bescheid über den allgemeinen wissenschaftlichen Betrieb, der damals in Alexandrien herrschte. Nach der Gründung des Weltreichs Alexanders entstand allmählich das Bedürfnis, alles, was die vorangegangenen Jahrhunderte geschaffen hatten, zu sammeln und in ein einheitliches wissenschaftliches System zu bringen, und so ent-

1) Euclidis opera omnia Bd. I - IV. Elementa. (Leipzig 1883 - 1885).
2) Kopenhagen 1896.
3) Leipzig 1901. = Abhandl. zur Gesch. d. math. Wiss. XI.

wickelte sich in Alexandrien ein Unterricht, wie er gewissen Seiten unseres heutigen Universitätsunterrichts entspricht. Vor stand dabei die Sammlung und Ordnung des vorhandenen Materiales der frei weiterbreibenden wissenschaftlichen Forschung voran, und so kann wohl in dem ganzen Betriebe ein gewisser Hang zur Schulmeisterei zur Geltung.

Bevor wir an die nähere Besprechung der Elemente herangehen, lassen Sie mich einige allgemeine Ausführungen über die geschichtliche Stellung und wissenschaftliche Bedeutung des Euklid oder vielmehr der Euklidischen Elemente machen. Es ist berechtigt, wenn ich nur von diesem einen Werke rede und die zahlreichen kleineren Schriften Euklids außer Acht lasse, die man natürlich für ein vollständiges Bild seiner Gesamtpersönlichkeit berücksichtigen müßte; denn die Elemente allein haben die merkwürdige beherrschende Stellung sich errungen, die vom unserem Standpunkt aus eine Kritik dringend erfordert.

Als Grundlage dieser Kritik diene die Bemerkung, daß die falsche Einschätzung der Euklidischen Elemente ihren tiefen Grund findet in einer verkehrten Auffassung des griechischen Geistes überhaupt, wie sie lange Zeit herrschte und wohl heute noch vielfach populär ist,

man glaubte, die griechische Kultur habe sich auf verhältnismäßig wenige Gebiete beschränkt, diese aber in so vollendeter Weise zu einem einheitlichen Bilde verarbeitet, daß ihr Standpunkt für alle Zeiten als höchstes, freilich unerreichbares Ziel gelten müsse. Tatsächlich hat aber die moderne philologische Wissenschaft die Unhaltbarkeit dieser Ansicht längst dargetan. Vielmehr hat sie gelehrt, daß gerade die Griechen wie kein anderes Volk sich mit der denkbar größten Vielseitigkeit auf allen Gebieten menschlicher Kultur betätigt haben; und so gewiß sie überall für jene Zeit Bewunderungswürdiges geleistet haben, so gewiß sind sie doch auch in manchen Dingen, von unserem heutigen Standpunkt aus betrachtet, nicht über die ersten Anfänge hinausgekommen, und auf keinem Gebiete kann man sagen, daß sie für alle Zeiten den Gipfel der menschlichen Leistungen erklommen hätten.

Was speziell die Mathematik anlangt, so hat diese Überschätzung – oder soll man sagen: Unterschätzung? – des Griechentums in dem Dogma ihren Ausdruck gefunden, daß die Griechen sich ganz wesentlich mit Geometrie beschäftigt hätten und da zu einem unübertrefflichen Systeme gekommen seien; diese Meinung hat sich besonders geradezu zu einem

Kulmus der Euklidischen Elemente verdichtet, in denen man dieses System in vollendeter Weise dargestellt zu sehen glaubte. Dieser alten und veralteten Ansicht habe ich hier die Behauptung entgegenzustellen, daß die Griechen neben der Geometrie auch die verschiedensten anderen Teilgebiete der Mathematik fruchtbar bearbeitet haben, daß wir aber heutzutage überall und gewiß auch in der Geometrie wesentlich über sie hinaus gekommen sind.

Lassen Sie mich diese Behauptung nun näher ausführen und begründen. Euklid wollte in seinen Elementen keineswegs eine Encyklopädie des gesamten geometrischen Wissens seiner Zeit schreiben, denn sonst hätte er in ihnen nicht ganze Teile der Geometrie, die man damals sicher schon kannte, einfach unberücksichtigt lassen dürfen; ich nenne als Beispiel nur die Theorie der Kegelschnitte und höheren Kurven, die die Griechen schon frühzeitig ausführlich zu behandeln begonnen hatten, [1] wenn auch ihre volle Entfaltung erst Apollonius (um 200 v. Chr.) zu verdanken ist. Vielmehr sollten die Elemente lediglich eine erste Einführung in das Studium der Geometrie – und damit der Mathematik überhaupt – sein, und dabei scheint es, daß sie noch auf einen

1) Euklid selbst hat ein – verloren gegangenes – Werk über die Kegelschnitte geschrieben.

ganz besonderen Zweck zugestutzt waren: sie sollten die Mathematik so praktizieren, wie man sie im Sinne der platonischen Schule als Vorbereitung für allgemeine philosophische Studien für notwendig hielt. Aus dieser Bestimmung versteht man, warum der Hauptwert auf die Herausarbeitung der logischen Zusammenhänge und die Aufstellung eines in sich geschlossenen Systemes der Geometrie gelegt ist, während alle praktischen Anwendungen gänzlich beiseite geschoben sind; diesem System zu Liebe hat Euklid aber auch gewiß ein ganzes Teil theoretischen Wissens seiner Zeit übergangen, das noch nicht weit genug entwickelt war, um sich in das System einpassen zu lassen.

Eine richtige Vorstellung von der Beschränktheit des Stoffes der Euklidschen Elemente gegenüber dem ganzen Umfange der griechischen Mathematik erhalten wir am besten, wenn wir zum Vergleich die Gesamtpersönlichkeit und die Gesamtleistung des größten griechischen Mathematikers Archimedes heranziehen, der kurz nach Euklid ums Jahr 250 v. Chr. in Syrakus lebte; ich will nur wenige besonders interessante unterscheidende Punkte hervorheben:

1) Ganz im Gegensatz zu dem in Euklids Elementen herrschenden Geist besitzt Archimedes einen

stark entwickelten Sinn für numerisches Rechnen. Eine seiner größten Leistungen ist ja, um nur ein bestimmtes Beispiel zu nennen, die Berechnung der Zahl π vermöge der Approximation des Kreises durch reguläre Polygone; dabei werden u. a. die bekannten Näherungswerte $\frac{22}{7}$ und $\frac{355}{113}$ für π bei ihm abgeleitet. Von einem Interesse für solche Zahlenwerte ist bei Euklid keine Spur; da findet sich statt dessen nur die Angabe, daß sich zwei Kreisflächen wie die Quadrate der Radien oder zwei Kreisumfänge wie die Radien selbst verhalten, aber die Berechnung des Proportionalitätsfaktors, eben der Zahl π, wird nicht einmal versucht.

2.) Überhaupt ist für Archimedes das weitgehende Interesse für Anwendungen jeder Art charakteristisch; die verschiedensten Probleme der Physik und Technik zieht er in Betracht. Bekannt ist ja, wie er das fundamentale Prinzip der Hydrostatik fand, oder wie er an der Verteidigung von Syrakus durch Konstruktion von wirkungsvollen Hilfsmaschinen tätigen Anteil nahm. Wie wenig dagegen Euklid in den Elementen die Anwendungen berücksichtigt, geht besonders deutlich aus dem kleinen Zuge hervor, daß nicht einmal die einfachsten Zeichenapparate – Lineal und Zirkel – bei ihm genannt werden; er postuliert lediglich in abs-

tracto, dass man eine Gerade durch 2 Punkte oder einen Kreis um einen Punkt zeichnen kann, ohne auch nur ein einziges Wort darüber zu verlieren, wie man das tut. Hier steht Euklid wohl im Banne der Auffassung, die überhaupt in gewissen antiken Philosophenschulen herrschte, dass die praktische Anwendung einer Wissenschaft etwas minderwertiges, handwerksmässiges sei. Leider hat sich diese Anschauung an manchen Stellen bis heute erhalten, und es gibt immer noch Hochschullehrer, die jede Beschäftigung mit Anwendungen als „Banausentum" nicht genug verachten können. Der Hochmut, der in solchen Ansichten liegt, muss aufs schärfste bekämpft werden; man sollte doch jede tüchtige Leistung, liege sie auf theoretischem oder angewandtem Gebiete, gleich hoch schätzen, und jedem einzelnen sich mit den Dingen befassen lassen, zu denen er am meisten Neigung verspürt. Dabei wird ein jeder um so vielseitiger sich zeigen, je mehr Talente er besitzt: unsere Allergrössten, wie Archimedes, Newton, Gauss, haben stets Theorie und Anwendungen gleichmässig umfasst.

3) Endlich fällt noch ein Unterschied besonders in die Augen: Archimedes war ein grosser Forscher und Bahnbrecher, der in jeder seiner Arbeiten die Erkenntnis um einen Schritt weiter führt; in Euklids Elementen

ten handelt es sich aber lediglich um Sammlung und Systematisierung von bereits vorhandenem Material. Damit hängt ein Unterschied in der Form der Darstellung zusammen, auf den ich auch im vorigen Semester bei allgemeineren Ausführungen gelegentlich hingewiesen habe.[1] Besonders charakteristisch für Archimedes ist in dieser Hinsicht eine neue Handschrift,[2] die man im letzten Jahre gefunden hat, und in der er einem wissenschaftlichen Freunde seine neuesten Untersuchungen über die Kubierung räumlicher Gebilde mitteilt. Da ist die Darstellung genau so, wie wir heute unterrichten; es wird genetisch vorgegangen, erst der Gedankengang angedeutet, und keineswegs die starre Gliederung in Voraussetzung, Behauptung, Beweis, Determination verwendet, die in den Euklidischen Elementen stets auftritt. Übrigens war auch vor jener neuen Entdeckung schon bekannt, daß die Griechen neben dieser auskristallisierten Form der Darstellung einer systematisierten Disziplin auch eine freiere genetische Form kannten, deren sich sowohl der Forscher bei seiner Arbeit, als auch der Lehrer beim Unterricht bediente, und die vermutlich auch Euklid in anderen Werken oder im eigenen Unterricht angewandt hat.

1) siehe Teil I, S. 198.

2) Vgl. Heiberg und Zeuthen, eine neue Schrift des Archimedes. (Leipzig 1907) = Bibliotheca mathematica 3. Folge Bd. 7. pg. 321 ff.

Ja es gab sogar in Alexandrien damals auch ein genaues Analogon zu unseren autographierten Vorlesungsheften, die man Hypomnemata nannte, also in loserer Darstellungsform gehaltene Wiedergaben der mündlichen Vorträge.

Das möge zum Vergleich der Elemente mit dem ganzen Umfange der griechischen Mathematik genügen; ich will nun noch, um den oben begonnenen Gedankengang zu beenden, an ganz wenigen Beispielen zeigen, wie weit die moderne Mathematik über die der Griechen hinausgekommen ist. Einer der wichtigsten Unterschiede ist, daß die Griechen noch keine selbständige Arithmetik besaßen, weder Dezimalbrüche, die umfangreichere numerische Rechnungen erleichtern, noch das allgemeine Buchstabenrechnen; beides sind, wie ich im vergangenen Wintersemester näher ausgeführt habe, Erfindungen der beginnenden Neuzeit, der Renaissance. Als Ersatz hatten die Griechen nur eine Arithmetik in geometrischer Form, in der statt mit Zahlen mit Strecken oder anderen geometrischen Größen konstruktiv operiert wird; solche Verfahren sind aber natürlich ungemein viel schwerfälliger. Damit hängt zusammen, daß die Griechen auch das nicht besaßen, was unserer Arithmetik und Algebra eigentlich erst ihre Geläufigkeit gibt: die negativen und die irra-

gonären Zahlen. Darum wieder fehlt ihnen die Allgemeinheit der Methode, die in einer Formel alle möglichen Fälle zusammenzufassen gestattet, und äußerst langwierige Fallunterscheidungen spielen bei ihnen die größte Rolle. Gerade in der Geometrie macht sich dieser Mangel vielfach geltend, wo wir jetzt – wir haben ja gerade in dieser Vorlesung stets diesen Weg eingeschlagen – durch Verwendung analytischer Hilfsmittel volle Allgemeinheit unter Vermeidung aller Fallunterscheidungen erreichen können. – Diese wenigen Andeutungen mögen hier genügen; Sie werden sich nach Ihrer eigenen Kenntnis ja selbst leicht weitere Rechenschaft über die Fortschritte der modernen Mathematik gegenüber der antiken geben können.

Nach dieser allgemeinen Kritik der Euklidischen Elemente können wir uns nun der spezielleren Besprechung zuwenden; lassen Sie mich mit einer kurzen Inhaltsübersicht über die 13 „Bücher", d. h. Kapitel beginnen, aus denen die Elemente bestehen.

Zunächst ist in Buch 1–6 die Planimetrie enthalten. Die ersten vier Bücher bringen die allgemeinen Auseinandersetzungen über die geometrischen Größen, wie Strecken, Winkel, Inhalte et c. und die Lehre von den einfachen geometrischen Figuren (Dreiecke, Paral-

Lelogramme, Kreise, reguläre Polygone et. c.) in der Form, wie man sie heute noch meist darstellt. Insbesondere ist darin auch (im Buch 2) eine elementare Arithmetik und Algebra der geometrischen Größen enthalten, wobei - um nur ein Beispiel anzuführen - das Produkt a.b zweier Strecken a, b als Rechteck dargestellt wird; soll man 2 solche Produkte a.b, c.d addieren, was wir arithmetisch unmittelbar ausführen können, so muß man, um die Summe wieder als Rechteck darstellen zu können, die beiden Rechtecke a.b, c.d erst auf gleiche Grundlinie bringen.

Das Buch 5 geht nun sehr viel tiefer, indem es das geometrische Äquivalent der allgemeinen positiven reellen Zahl einführt; das ist das Verhältnis $\frac{a}{b}$ irgend zweier Strecken a, b, das Euklid Logos (λόγος) nennt. Als wir im vergangenen Semester allgemein von der Irrationalzahl handelten, hatte ich ja schon auf diese Theorie Euklids hingewiesen.[1] - Das wesentliche Moment an diesen Entwicklungen ist die Definition der Gleichheit zweier Verhältnisse $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$; diese Definition muß ganz allgemein sein, also insbesondere auch für den Fall gelten, daß $\frac{a}{b}$ in unserem Sinne eine irrationale Zahl ist; Euklid nennt

1) Siehe Teil I, S. 81.

dann die Strecken a, b „asymmetros", d. h. ohne gemeinsames Maß, was dann später in „inkommensurabel" übersetzt wurde. Euklids Verfahren zur Definition der Gleichheit ist nun dieses: Er nimmt irgend 2 ganze Zahlen m, n und sieht zu, welche der 3 Möglichkeiten $m \cdot a \gtrless n \cdot b$ zutrifft; ist dann für jede mögliche Wahl von m und n stets auch gleichzeitig dieselbe Möglichkeit von $c \gtrless n \cdot d$ erfüllt, so heißt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Diese Definition entspricht tatsächlich ganz dem berühmten Schnittverfahren, durch welches Dedekind die irrationale Zahl einführt.

An diese ersten Definitionen schließt nun Euklid die Untersuchung an, wie man mit solchen Gleichungen zwischen Verhältnissen rechnet, und entwickelt so seine vielgenannte Proportionenlehre, d. i. eine geometrische Theorie aller möglichen algebraischen Umformungen der Gleichungen vom Typus $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Übrigens heißt bei Euklid die Proportion „Analogie", und dies Wort soll besagen, der „Logos" zweier Größenpaare ist derselbe; Sie sehen wie merkwürdig weit dieses Wort heute seine Bedeutung geändert hat. Und doch gibt es Stellen in der Mathematik, wo es sich noch heute in seiner ursprünglichen Bedeutung erhalten hat; man spricht nämlich in der Trigonometrie von den Mayerschen Analogieen, eben weil das gewisse Propor-

tionen sind, wobei freilich heute wohl nur die wenigsten die eigentliche Bedeutung dieses Namens kennen.

Die Proportionenlehre ist ein charakteristisches Beispiel dafür, mit welcher Zähigkeit sich die Euklidische Tradition im geometrischen Unterricht erhält. Noch heute wird diese Lehre nämlich in vielen, ja vielleicht in den meisten Schulen als besonderes Kapitel der Geometrie behandelt, obwohl sie sachlich ja in unserer modernen Arithmetik vollkommen enthalten ist, und demgemäß im arithmetischen Unterricht sogar schon zweimal, erst im Rechnen bei der Regeldetri und dann in den Anfängen der Buchstabenrechnung durchgenommen wird. Warum dann dieselbe Sache noch zum dritten Male in besonders geheimnisvoller, geometrischer Aufmachung erscheinen soll, ist wahrhaftig nicht einzusehen, und muß insbesondere dem Schüler vollkommen unverständlich bleiben. Der einzige Grund ist eben, daß man immer noch an dem alten Euklidischen Lehrgang hängt, obwohl doch der vernünftige Zweck, den Euklid mit der Proportionenlehre verband – einen Ersatz für die ihm fehlende Arithmetik zu schaffen – für uns durchaus gegenstandslos geworden ist.

Diese Kritik der heutigen Behandlung der Pro-

portionenlehre soll sich natürlich nicht auf die wissenschaftliche Bedeutung des fünften Buches Euklids beziehen; die ist vielmehr besonders groß, weil hier zum ersten Male – modern zu reden – die Berechtigung des Rechnens mit irrationalen Zahlen auf Grund scharfer Definitionen durchaus einwandsfrei dargetan wird. Hier sieht man so recht, daß die Elemente keineswegs ein Schulbuch waren und sind, wie das so oft mißverständlich angenommen wurde; vielmehr setzen sie durchaus einen reiferen, wissenschaftlichen Betrachtungen zugänglichen Standpunkt des Lesers voraus.

Ich muß hier noch die Tradition erwähnen, daß dieses fünfte Buch nicht von Euklid selbst geschrieben sei, sondern von Eudoxus von Knidos (um 350 v. Chr.) herrühre. Ueberhaupt hält man die Elemente nicht für ein einheitlich aus einem Guß geschriebenes Werk, sondern sie sollen aus verschiedenen vorhandenen älteren Bestandteilen zusammengeschweißt worden sein.

So gewiß das auch richtig ist, so sind alle bestimmten Angaben über die Verfasser etc. mit der größten Unsicherheit behaftet, da aus den Lebzeiten Euklids oder gar in eigenen Zitaten von ihm durchaus kein Material vorliegt. Im vorliegenden Falle geht die Tradition auf den Euklidkommentator Proclus

Diadochus zurück, der um 450 nach Christus, also über 700 Jahre nach Euklid lebte; mag die Behauptung von Proclus aus manchen Gründen auch eine gewisse innere Wahrscheinlichkeit besitzen, so wird man sie doch als absolut sicheres Zeugniss ebensowenig gelten lassen, als wenn heute jemand eine Theorie über die Autorschaft eines um 1200 verfassten Werkes aufstellte!

Gehen wir nach diesen Abschweifungen in der Inhaltsangabe der Elemente weiter, so enthält Buch 6 die Lehre von den ähnlichen Figuren, wobei jene Proportionenlehre das Hauptthilfsmittel ist.

In den Büchern 7, 8, 9 findet sich die Lehre von den ganzen Zahlen in geometrischer Form; zum Teil werden dabei für Kommensurable Grössen die Betrachtungen wiederholt, die in Buch 5 allgemein angestellt wurden – was gewiss die Annahme heterogenen Ursprungs der verschiedenen Bücher bestätigt. – Ich möchte aus dem Inhalte dieser Bücher hier nur 2 Sachen hervorheben, die noch heute in der Zahlentheorie stets benutzt werden. Das eine ist der sog. Euklidische Algorithmus zur Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Teilers zweier ganzen Zahlen a, b, die bei Euklid durch Strecken dargestellt werden. In moderner Sprache besteht er darin, dass man a durch b divi-

diert, dann b durch den Rest und so nach dem Schema

$$a = m \cdot b + r_1$$
$$b = m_1 \cdot r_1 + r_2$$
$$r_1 = m_2 \cdot r_2 + r_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

fortfährt, bis notwendig nach endlich vielen Schritten die Division aufgeht; der letzte Rest ist dann der gesuchte Teiler. – Zweitens aber findet sich bei Euklid bereits der bekannte einfache Nachweis der Existenz unendlich vieler Primzahlen, den ich übrigens auch schon in der vorigen Vorlesung vortrug.[1]

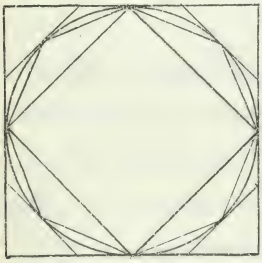
Im Buch 10 weiterhin, das in seiner geometrischen Ausdrucksweise wohl besonders schwerfällig und schwer verständlich ist, findet sich eine geometrische Klassifikation der durch Quadratwurzeln darstellbaren Irrationalitäten, wie sie später für deren geometrische Konstruktionen gebraucht wird.

Nun erst folgen in Buch 11 die Anfänge der Stereometrie. Sie sehen, Euklid ist kein „Fusionist"; er stellt vielmehr die Stereometrie soweit entfernt von der Planimetrie, wie nur irgend möglich, während wir im Sinne der mehrfach erwähnten „Fusionsbestrebungen" es heute für richtig halten, die Raumvorstellung als Ganz-

[1] Siehe Teil I, S. 101.

des so früh als möglich zu entwickeln, und dazu von vornherein den Schüler an dreidimensionale Figuren gewöhnen, statt ihm erst künstlich die Beschränkung auf die Ebene anzuerziehen.

Im Buche 12 treten nun wohl zum <u>allgemeine Betrachtungen über irrationale Größen</u> auf, die zur Bestimmung des Volumens der Pyramide notwendig werden. Es handelt sich hier um eine verhüllte Anwendung des Grenzbegriffes im sog. <u>Exhaustionsbeweise</u>, durch den Proportionen zwischen irrationalen Größen wirklich hergestellt werden. Vorher wird dieses Verfahren noch zu dem Beweis des planimetrischen Satzes benutzt, daß 2 Kreise sich wie die Quadrate ihrer Radien verhalten. Der Grundgedanke dieses Verfahrens ist, daß jeder Kreis durch ein- und umgeschriebene n-Ecke von immer wachsender Seitenzahl immer besser angenähert, gewissermaßen „ausgeschöpft" wird; würde nun jene Proportion nicht stattfinden, so könnte man leicht einen Widerspruch gegen die Tatsache herleiten, daß jedes eingeschriebene Polygon kleiner, jedes umgeschriebene aber größer ist als der Kreis.



Das <u>13. Buch</u> endlich bringt die <u>Theorie der re-</u>

gulären Körper und gipfelt unter Benutzung des im zehnten angesammelten Materials in dem Nachweise, daß man alle Körper, d. h. die Längen ihrer Seiten, mit Lineal und Zirkel konstruieren kann. Dieser Abschluß entspricht dem besonderen Interesse, welches die griechischen Philosophen von jeher dem regulären Körper entgegenbrachten.

Nach diesem allgemeinen Inhaltsüberblick wollen wir uns nun, wie es ja unser Vorsatz war, etwas näher mit den Kapiteln des Euklid beschäftigen, die von den Grundlagen der Geometrie handeln. Das ideale Ziel, das Euklid vorschwebt, ist ganz offenbar die lückenlose, logische Ableitung aller geometrischen Sätze aus vorher vollständig aufzustellenden Prämissen; in der Aufrichtung (oder Uebermittelung) dieses Ideals ruht ohne Zweifel der Kern der historischen Bedeutung der Elemente. Keineswegs aber ist die Sachlage die, daß Euklid dieses sein hohes Ziel wirklich erreicht hat, denn gerade auch in den grundlegenden geometrischen Betrachtungen ist die moderne Wissenschaft auf einem wesentlich höheren Standpunkt angelangt und hat wesentliche Unklarheiten bei ihm aufgedeckt. Trotzdem aber – so stark ist die Tradition! – hält man auch heut vielfach Euklids Darstellung für das unübertroffene Muster einer Grundlegung der Geometrie; lassen Sie mich als ein Bei-

spiel für viele nur einen Satz aus dem Anfang von Tropfkes Geschichte der Elementarmathematik [1] zitieren: „Holzer als ein Denkmal von Stein, schärfer und reiner in der Linienführung als irgend ein Kunstwerk, hat es (das System Euklids) sich der Jetztzeit erhalten." Schärfer kann man kaum die historische Bedeutung eines Werkes mit einer absoluten, bleibenden verwechseln, und es ist nur natürlich, wenn ich solcher grenzenlosen Ueberschätzung der Euklidischen Elemente gegenüber in der nachfolgenden Kritik besonders die negative Seite, die Punkte, wo Euklids Darstellung unsern Ansprüchen nicht mehr genügen kann, hervorhebe.

Seine besondere Schwierigkeit bei jeder solchen Kritik Euklids freilich entsteht durch die Unsicherheit des Textes. Manches ist durch den schon genannten Proklus beglaubigt und das ist noch die älteste Quelle; die ältesten Kodices, die wir besitzen, stammen aus dem 9ten Jahrhundert n. Chr., d. h. sie sind gar 1200 Jahre jünger als Euklid! Dazu weichen diese verschiedenen Kodices außerordentlich von einander ab, und besonders häufig gerade auch in den grundlegenden Stücken, auf die es besonders ankommt. Daneben läuft nun noch die Tradition lateinischer und

1) Bd. 2. (Leipzig 1903) pag. 3

arabischer Uebersetzer und Kommentatoren, bei denen sich – entstanden aus dem Bestreben, den Text zu klären – immer wieder bedeutende Abweichungen finden. Die Herstellung eines möglichst verläßlichen Textes der Elemente ist so ein äußerst kompliziertes philologisches Problem, auf das in der Tat auch ungeheuer viel Scharfsinn verwandt worden ist. Man muß sich nur klar darüber werden, daß alles, was durch solche philologische Arbeit erreicht werden kann, bestenfalls die Herstellung des wahrscheinlichsten Textes ist, der aber ganz gewiß nicht der wahre Originaltext sein dürfte, denn es ist durchaus nicht anzunehmen, daß das, was wir aus vielen verschiedenen Aussagen als wahrscheinlichsten Hergang entnehmen, mit der Wirklichkeit in allen Punkten übereinstimmt. Auf der Höhe der heutigen philologischen Wissenschaft steht nach allgemeiner Ansicht Heibergs Text, und wir Nichtphilologen können nichts besseres tun, als ihm unseren Ausführungen zu Grunde zu legen, wobei wir aber dem Gesagten zufolge nie vergessen dürfen, daß er mit dem Original durchaus nicht identisch zu sein braucht. Finden sich also in unserem Text Mängel und Widersprüche, so wird man immer noch im Zweifel sein müssen, ob man sie Euklid vorwerfen muß, oder ob sie sich erst durch

die Ueberlieferung eingeschränken haben.

Um nun zur Sache zu kommen, wollen wir zunächst zusehen, wie sich in Buch 1 der Elemente die Grundlegung der Geometrie gestaltet. Euklid stellt dar an die Spitze 3 Gruppen von Sätzen, die er ὅροι (definitiones), αἰτήματα (postulata), κοιναὶ ἔννοιαι (communes animi conceptiones) nennt, was wir deutsch etwa als Erklärungen, Forderungen und Grundsätze ausdrücken können; für die letzte Gruppe gebraucht man jedoch seit Proclus gewöhnlich das Wort Axiome, das heutzutage bekanntlich eine allgemeinere, die Postulate mit umfassende Bedeutung angenommen hat.

Um den Inhalt dieser Sätze zu verstehen, zunächst den der Erklärungen, wollen wir uns erst erinnern, wie wir früher bei der Grundlegung der Geometrie begannen. Wir sagten, gewisse Dinge, wie Punkte, Gerade, Ebenen können wir nicht definieren, sondern müssen sie als jedem Menschen geläufige Grundbegriffe annehmen, und nur die Eigenschaften, die wir von ihnen benutzen wollen, scharf aussprechen; darauf konnten wir die Geometrie bis hin zum Koordinatensystem x, y, z der analytischen Geometrie aufbauen, und bildeten uns erst hinterher den allgemeineren Kurvenbegriff, indem wir x, y, z gleich stetigen Funktionen einer

Parameters t setzten. Ich habe gelegentlich angedeutet, daß hier noch die wunderbarsten Ausartungen, wie Kurven, die eine Fläche vollständig überdecken u. dgl., mit inbegriffen sind.

Euklid hat nicht diese vorsichtige oder resignierte Auffassung. Er beginnt mit der „Erklärung" aller möglichen geometrischen Begriffe, wie Punkt, Linie, Gerade, Fläche, Ebene, Winkel, Kreis et c. Die erste Erklärung lautet: Ein Punkt ist, dessen Teil nichts ist. Wir werden das aber kaum als eigentliche Definition anerkennen können, da ein Punkt doch keineswegs durch diese Eigenschaft allein bestimmt ist. Weiter heißt es dann: die Linie ist Länge ohne Breite. Hier ist gar die Richtigkeit der Aussage zweifelhaft, wenn man den soeben angedeuteten allgemeinen Kurvenbegriff anerkennt, von dem Euklid freilich noch nichts wußte. An dritter Stelle wird dann die Gerade als eine Linie erklärt, die gleichmäßig durch ihre Punkte gelegt ist. Der Sinn dieser Aussage ist vollends dunkel und man kann sich allerlei darunter denken. Es könnte heißen, daß die Gerade überall gleiche Richtung hat, dann müßte die Richtung als bereits jedem geläufiger Grundbegriff anerkannt sein. Man könnte aber auch daran denken, daß eine Gerade, wenn man sie als star-

rer Stab realisiert denkt, bei gewissen Bewegungen des Raumes immer mit sich selbst in Deckung bleibt, nämlich bei den Drehungen um sie als Achse und den Verschiebungen an ihr entlang. Bei dieser Auffassung der Erklärung Euklids wäre freilich wieder der Begriff der Bewegung vorausgesetzt, und ob Euklid das tut, das ist eine sehr strittige Frage, auf die wir noch genauer zurückzukommen haben werden. Jedenfalls ist es nicht gelungen, für Euklids Definition der Geraden und ebenso auch für viele seiner weiteren Erklärungen, auf die ich hier im einzelnen nicht mehr eingehe, eine eindeutige Interpretation zu finden.

Wir kommen nun zu den Postulaten, deren sich in der Heibergschen Ausgabe 5 angegeben finden. Sie verlangen, daß es möglich sein soll:

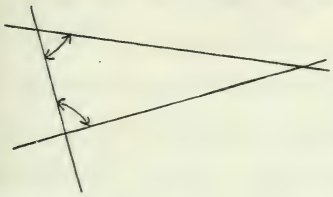
a.) Von einem Punkte nach einem anderen eine Gerade zu ziehen.

b.) Eine begrenzte Gerade unbegrenzt zu verlängern.

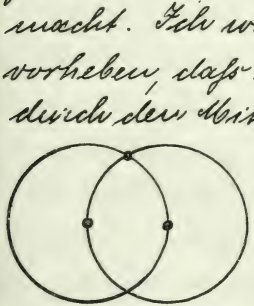
c.) Einen Kreis mit gegebenem Mittelpunkt zu beschreiben, der durch einen gegebenen Punkt geht.

Das vierte stelle ich vorläufig zurück und nenne bald das fünfte, das sog. Parallelenpostulat:

e,) Wenn 2 Gerade mit einer dritten auf derselben Seite innere Winkel bilden, deren Summe kleiner als ein flacher Winkel ist, so schneiden sie sich bei hinreichender Verlängerung auf dieser Seite.



Diese Postulate drücken die Ausführbarkeit gewisser Konstruktionen oder die Existenz gewisser geometrischer Gebilde aus, wie sie Euklid in seinen späteren Betrachtungen tatsächlich benutzt. Aber es gibt noch eine ganze Reihe ähnlicher Existenzpostulate in der Geometrie, die aus den genannten rein logisch nicht folgen, und von denen Euklid doch ebenso Gebrauch macht. Ich will nur als ein Beispiel den Satz hervorheben, daß zwei Kreise sich schneiden, wenn jeder durch den Mittelpunkt des anderen geht, und könnte noch eine Reihe ähnlicher Sätze nennen. Wir werden danach also das Euklidische System der Postulate jedenfalls als lückenhaft bezeichnen müssen. Doch nun das vierte Postulat:



d,) Alle rechten Winkel sind einander gleich. Es ist viel darüber gestritten worden, wie dies Postulat zu verstehen ist und wie es überhaupt an seine Stelle kommt; dabei spielt die große Frage hinein, ob Eu-

blick den Bewegungsbegriff benutzt oder nicht. Stellt man den Begriff der Bewegung der Figuren als starrer Körper konsequent an die Spitze, wie wir das bei unserem ersten Aufbau der Geometrie taten, so ergibt sich (vgl. S. 344) dieses Postulat als notwendige logische Folge, und es wäre daher – wenn anders Euklid diese Auffassung hat – hier durchaus unnötig. Nun ist aber in allen diesen grundlegenden Sätzen Euklids von Bewegungen sonst nicht explizit die Rede, so daß manche Erklärer annehmen, dies vierte Postulat solle geradezu zur Einführung der Bewegungsidee dienen – allerdings, wie man dann wohl zugeben muß, in etwas unvollkommener Form.

Gegenüber dieser Ansicht meint wohl die Mehrzahl der Euklidkommentatoren, daß eine der wesentlichen Tendenzen Euklids gerade sei, gemäß gewissen philosophischen Erwägungen (vgl. S. 356) den Bewegungsbegriff prinzipiell aus der Geometrie fern zu halten; nach ihnen müßte dann der abstrakte Begriff der Kongruenz an der Spitze stehen – wie bei unserem zweiten Aufbau – und wiederum hätte dies vierte Postulat als Grundlage für die Lehre von der Kongruenz zu gelten. Dabei entsteht dann freilich die Frage, warum nicht auch über die Kongruenz von Strecken analoge Angaben gemacht werden. Was für wesent-

liche Schwierigkeiten aber sowohl der einen als der anderen Auffassung in den weiteren Entwicklungen Euklids erwachsen, das werden wir sogleich noch sehen.

Hier nur noch die Bemerkung, daß keine der beiden Deutungen recht erklärt, warum dieser Satz gerade unter den Postulaten mit ihrer oben charakterisierten allgemeinen Tendenz steht; das hat Zeuthen zu einem interessanten Erklärungsversuche veranlaßt, der freilich nicht ganz überzeugend ist: das Postulat soll aussagen, daß die Verlängerung einer Strecke über einen Punkt hinaus, die nach Postulat b) überhaupt möglich ist, eindeutig bestimmt ist. Näheres mögen Sie in Zeuthens Geschichte [1]) nachlesen. Endlich bleibt natürlich immer der Ausweg, daß man hier eine Verderbtheit des Textes annimmt, und das ist auch von manchen Seiten geschehen, und ja in der Tat auch nicht zu widerlegen.

Ich wende mich nun endlich zu den Grundsätzen, deren es bei Heiberg wiederum fünf gibt:

a.) Was demselben dritten gleich ist, ist untereinander gleich; wenn $a=b$, $b=c$, so ist $a=c$.

b.) Gleiches und Gleiches vermehrt gibt Gleiches; wenn $a=b$, $c=d$, so ist $a+c=b+d$.

---

1) loc. cit. pag. 125 ff.

c.) Wenn $a = b$, $c = d$, so ist $a - c = b - d$.

d.) Das Ganze ist größer als der Teil:

$$a > a - b.$$

e.) Einander Deckendes ist gleich.

Die ersten vier dieser Sätze sind fundamental logischer Natur, und hier soll offenbar ausgesagt werden, daß diese allgemeinen Sätze speziell auch für alle in Betracht Kommenden geometrischen Größen (Strecken, Winkel, Flächeninhalte etc. etc.) gelten. Der fünfte Satz bestimmt dann, daß in letzter Linie die „Kongruenz" oder das „zur Deckung bringen" das für die Gleichheit und Ungleichheit entscheidende Moment ist – wobei freilich wieder die Unklarheit bleibt, ob die Bewegungsidee vorausgesetzt ist, oder nicht.

Was nun den Unterschied zwischen Grundsätzen und Postulaten anlangt, so hat Simon die Formulierung gegeben, daß jene die einfachsten Tatsachen der Logik, diese die der Raumanschauung betreffen. Das wäre sehr zutreffend und einleuchtend, wenn es nur gewiß wäre, daß die hier gegebene Anordnung nach Heibergs Rekonstruktionen genau dem Original entspräche. Aber tatsächlich finden sich in den Kodizes ganz wesentliche Abweichungen in der Anordnung und dem Inhalt der Postulate und Axiome, die sich keineswegs je-

neun Schema fügen; besonders wird z. B. der Parallelensatz häufig als 11. Axiom aufgeführt.

Nunmehr wollen wir uns genauer den Anfang des Euklidischen Lehrgebäudes der Geometrie, das auf diesen Erklärungen, Postulaten und Axiomen aufgeführt wird, ansehen, nämlich die ersten 4 Paragraphen, die auf die Axiome folgen. Dabei werden wir zugleich über Euklids Auffassung der Grundlagen, im besondere auch seine Stellung zum Bewegungsbegriff interessante Wahrnehmungen machen können.

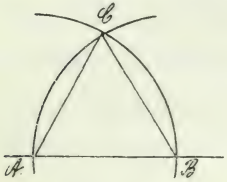
Es handelt sich hier zunächst um die Aufgabe, eine gegebene Strecke A B auf einer anderen Strecke C F von C aus abzutragen. Das wird jeder Mensch

A ——— B
C ——————— F

natürlich durch direkte Übertragung mittelst eines Zirkels oder eines Papierstreifens – d. h. durch Verschiebung eines starren Körpers in der Ebene – ausführen. Anders Euklid in seinen theoretischen Betrachtungen: Er hat ja in seinen Postulaten eine Konstruktion, die diesem frei beweglichen Zirkel entspricht, nicht vorausgesetzt, sondern sein Postulat c.) gestattet nur, um einen Punkt einen Kreis zu schlagen, wenn ein Punkt der Peripherie bereits gegeben ist. Nun will er lediglich die in den Postulaten gegebenen Möglichkeiten verwenden

und muß daher die anscheinend so einfache Konstruktion in eine größere Zahl komplizierterer, allerdings kürzerer Schritte zergliedern:

1) <u>Ueber einer gegebenen Strecke A B ein gleichseitiges Dreieck zu errichten</u>. Nach Postulat c.) läßt sich um A ein Kreis mit A B, um B einer mit B A schlagen; daß diese Kreise einen Schnittpunkt C haben, wird freilich, wie schon erwähnt, ohne weitere Erörterung angenommen. Nun folgt ein streng formal logischer Beweis unter Benutzung der Grundsätze, daß A B C tatsächlich gleichseitig ist.



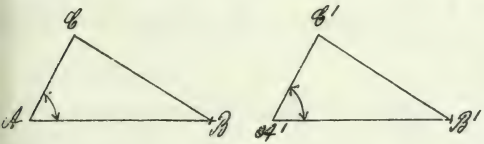
2) <u>Von einem gegebenen Punkte C aus eine Strecke abzutragen, die einer gegebenen A B gleich ist</u>. Nach 1) errichte man über A C ein gleichseitiges Dreieck A C D.

Dann verlängere man D A über A hinaus (Postul. b) und schlage um A mit A B einen Kreis (Postul. c) bis zum Schnitt B' mit D A. Die Existenz dieses Schnittes wird freilich wieder nicht besonders hervorgehoben. Nun schlage man

um D mit D B' einen Kreis und schneide ihn mit der Verlängerung von D C in E. Dann ist C E = A B. Der Beweis, dessen Verlauf man ja sofort überblickt, wird zum Schluß wieder genau ausgeführt.

3) Gegeben 2 Strecken A B, C F; auf C F eine Strecke gleich A B von C aus abzutragen. Nach 2.) zeichne man irgend eine Strecke C E = A B von C aus, und schlage um C einen Kreis mit C E, der C F in G trifft; C G ist die gesuchte Strecke.

4.) Nach diesen 3 Sätzen folgt nun an vierter Stelle der erste Kongruenzsatz samt Beweis: Stimmen 2 Dreiecke A B C, A' B' C' in 2 Seiten (A B = A' B', A C = A' C') und einem Winkel (A = A') überein, so stimmen sie in allen Stücken überein. Hier begeht Euklid dem vorigen gegenüber jene merkwürdige Inkonsequenz, wegen deren ich diese ganzen Betrachtungen wiedergebe. Er denkt sich das Dreieck A' B' C' so auf A B C gelegt, daß die Seiten A' B', A' C' bez. auf A B, A C und der Winkel A auf den Winkel A' fällt. Nun haben wir wohl im Vorhergehenden das Abtragen einer Strecke auf einer anderen sehr genau gelernt, aber von dem Abtragen eines Winkels war noch nicht die Rede und noch viel weniger war je



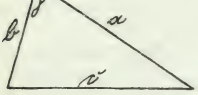
etwas davon gesagt, was bei einem solchen Uebertragungsprozeß aus der dritten Seite $B'C'$ wird, ob diese denn z. B. überhaupt eine Gerade bleibt. Anschaulich ist das ja ganz klar, aber das ganze Ziel Euklids ist ja immer die logische Vollständigkeit seiner Deduktion. Trotzdem schließt er nun hier ohne irgendwelche nähere Ausführungen, daß auch $B'C'$ beim geschilderten Aufeinanderlegen in eine Gerade übergehen muß, die dann freilich notwendig mit BC zur Deckung kommt. Das heißt aber nichts als die volle Existenz von Bewegungen, die Gestalt und Abmessungen der geometrischen Figuren nicht ändern, voraussetzen – so wie wir das bei unserem ersten Aufbau der Geometrie taten; dabei ist es dann allerdings selbstverständlich (vgl. S. 358), daß sich der erste Kongruenzsatz beweisen läßt.

So würde also dieser Beweis Euklids ganz dafür sprechen, daß er Anhänger der Bewegungsidee ist. Aber dann bleibt die Frage, warum in den Grundlagen gar nicht die Rede davon ist, und vor allem wäre alsdann seine kunstvolle Lösung der Aufgaben 2 und 3 durchaus zwecklos, da sie sich bei Verwendung des Bewegungsbegriffes mit einem Worte erledigen lassen. Betrachten wir aber andererseits – das scheint noch die einzig mögliche Lösung in diesem

Wirrwarr – diese Nr. 4 als ein späteres Einschiebsel, so bleibt doch die Frage offen, wie sich Euklid zum ersten Kongruenzsatz gestellt hat, und damit bleibt eine wesentliche Lücke in seinen Entwicklungen; denn ohne Bewegungsbegriff kann man ihm unmöglich beweisen, und es bleibt nichts über, als ihn, wie in unserem zweiten Aufbau der Geometrie (S. 357), unter die Axiome aufzunehmen. Wir können jedenfalls diese Erörterungen abschließend nur sagen, daß sich gerade am Anfange der ersten Buches der Elemente soviele innere Schwierigkeiten erheben, daß von einem Erreichen des Ideales, so wie wir es vorhin hinstellten, hier durchaus nicht die Rede sein kann.

Wesentlich schwerer aber als alle diese Lücken und Unklarheiten wiegt ein anderer Einwand, den man gegen Euklids Darstellung der Grundlagen machen muß, wenn man ihn an seinem eigenen Ideal mißt, und sich dabei unsere heutigen Kenntnisse vorhält. Euklid hat nämlich, um es zunächst in der uns geläufigen analytischen Sprache zu sagen, bei seinen geometrischen Größen (Strecken, Winkel, Flächen etc.) niemals ein Vorzeichen, sondern er behandelt sie sämtlich stets als absolute Größen; er treibt gewissermaßen eine analytische Geometrie, in der die Koordinaten

und sonstigen Größen nur nach ihrem Absolutwerte ein gehen. Die Folge davon ist, daß er nicht zur Aufstellung allgemeingültiger Sätze gelangen kann, sondern stets Fallunterscheidungen vornehmen muß, je nachdem im konkreten Falle die Stücke in der Figur so oder anders liegen. Um



ein einfaches Beispiel zu nennen, so gilt in unserer modernen Formelsprache der sog. erweiterte pythagoräische Lehrsatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

allgemein für spitz- und stumpfwinkelige Dreiecke, da wir $\cos\gamma$ sinngemäß als positive oder negative Größe auffassen. Euklid aber kennt nur den Absolutwert $|\cos\gamma|$, und er müßte daher in beiden Fällen 2 verschiedene Formeln

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab|\cos\gamma| \text{ und } c^2 = a^2 + b^2 + 2ab|\cos\gamma|$$

unterscheiden. Natürlich werden diese Fallunterscheidungen um so komplizierter und unübersichtlicher, je weiter man geht.

Man kann den Mangel, von dem hier die Rede ist, natürlich auch ganz rein geometrisch formulieren. Dem Unterschied der Vorzeichen in der analytischen Darstellung entspricht in der reinen Geometrie ein Unterschied in der Anordnung, von dem Typus, ob ein Punkt C zwischen A und B oder außerhalb der

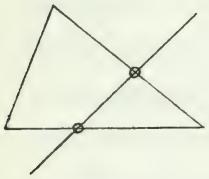
Strecke A B liegt. Man wird nun erst dann ein vollständiges logisches Gebäude der Geometrie aufführen können, wenn man die Grundtatsachen dieser Lagenbeziehung, die sog. „Axiome des Zwischen" ausdrücklich formuliert, wie ich dies ja oben bei jedem Aufbau der Geometrie betont habe. Unterläßt man das aber, wie Euklid, so wird das Ideal der rein logischen Beherrschung der Geometrie nicht erreicht, und man muß immer wieder auf die Figur zur Prüfung der Lagenverhältnisse zurückgreifen. Unser Einwand gegen Euklid ist also, kurz gesagt, der, daß er keine Zwischenaxiome hat.

Nun ist tatsächlich die Einsicht, daß man bestimmte Voraussetzungen über das „Zwischen" formulieren müsse, mit anderen Worten, daß man die elementargeometrischen Größen nach gewissen Verabredungen mit Vorzeichen behaften müsse, noch relativ recht neuen Datums; ich hatte ja zu Anfang dieser Vorlesung (S. 32), als wir uns ausführlich damit beschäftigten, berichtet, daß wir die erste konsequente Durchführung der Vorzeichenregeln in Möbius „Baryzentrischem Kalkul" von 1827 finden.

Weiter ist in diesem Zusammenhang eine Stelle aus einem Briefe von Gauß an W. Bolyai vom 6. März 1832 historisch interessant, die freilich erst 1900 bei der Veröffent-

leitung in Bd. VIII der Werke [1] bekannt wurde und die lautet: „Bei einer vollständigen Durchführung müssen solche Worte wie „zwischen" auch erst auf klare Begriffe gebracht werden, was selbst gut angelegt, was ich aber nirgends geleistet finde."

Die erste genauere geometrische Formulierung dieser „Zwischenaxiome" gab Pasch 1882 in seinen „Vorlesungen über neuere Geometrie." [2] Vor allem tritt hier zum ersten Male der übrigens früher bei unserem ersten Aufbau der Geometrie (S. 336) ausdrücklich genannte und benutzte charakteristische Satz auf: Trifft eine Gerade eine Seite eines Dreieckes, so trifft sie gewiß auch eine der beiden andern.



Man darf die Bedeutung dieser Zwischenaxiome nicht unterschätzen; sie sind ebenso wichtig, wie alle andern Axiome, wenn man die Geometrie wirklich als rein logische Wissenschaft aufbauen will, die zur Abwicklung ihrer Schlüsse nach Aufstellung der Axiome nicht mehr notwendig der Bezugnahme auf Anschauung und Figuren bedarf (so anregend und für die Forschung förderlich diese Bezugnahme selbstverständlich auch stets bleiben wird). Euklid also, der diese Axiome nicht hat,

1) pag. 222
2) Leipzig 1882

muß immer noch mit Fallunterscheidungen an der Hand der Figuren operieren, und da er andererseits auf das richtige geometrische Zeichnen so wenig Gewicht legt, so liegt die Gefahr nahe, daß ein Schüler des Euklid an der Hand falsch gezeichneter Figuren auch einmal zu falschen Sätzen kommt. So entstehen die zahlreichen sog. geometrischen Sophismen, das sind sonst formell korrekte Beweise für falsche Sätze, die nur auf schlecht gezeichneten, d. h. gegen die Zwischenaxiome verstoßenden Figuren beruhen. Ich teile gern ein Beispiel mit, das gewiß manchem von Ihnen bekannt ist, den Beweis, daß jedes Dreieck gleichschenklig ist.

Man zieht da zunächst die Halbierende des Winkels α und die Senkrechte in Mittelpunkt F der Seite BC. Wären beide parallel, so stünde die Winkelhalbierende auf BC senkrecht, und das Dreieck wäre bekanntlich wirklich gleichschenklig, wie sofort zu zeigen. Wir können also annehmen, daß jene beiden Geraden sich schneiden, und wir unterscheiden nun wieder 2 Fälle je nachdem der Schnitt O innerhalb oder außerhalb des Dreiecks liegt; in jedem Falle ziehen wir OE und OF senkrecht auf AB und AC und verbinden O mit B und C.

Im ersten Falle sind nun die horizontal schraf-

fierten Dreiecke A O F und A O E kongruent, da sie in der Seite A O, den Winkeln bei A und den rechten Winkeln übereinstimmen; also ist

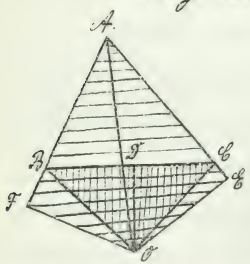
$$A F = A E.$$

Ebenso sind die vertikal schraffierten Dreiecke O E J, O B J kongruent, da in ihnen die Seiten O J und J E = J B sowie die rechten Winkel übereinstimmen. Also ist O E = O B und hieraus schließen wir weiter, da nach der ersten Kongruenz auch O E = O F ist, auf die Kongruenz der freigelassenen Dreiecke O E E und O B F; daher ist

$$F B = E E$$

und die Addition zur vorhin gewonnenen Gleichung ergibt tatsächlich <u>A E = A B</u>.

Liegt nun zweitens <u>O außerhalb</u>, so schließen wir



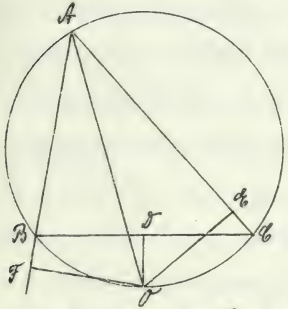
genau ebenso auf die Kongruenz der 3 Paar entsprechender Dreiecke und finden insbesondere

$$A F = A E, \quad F B = E E.$$

Durch Subtraktion folgt hieraus, wie die Figur zeigt, wieder A B = A E, d. h. die Gleichschenkligkeit wäre in jedem Falle erwiesen.

Was nun an diesem Beweise falsch ist, ist tatsächlich nur die Figur. Einmal kann nämlich <u>O nie</u>

mals innerhalb des Dreiecks liegen, und dann kann nie die im zweiten Fall gezeichnete Lage statt haben, sondern es muß stets einer der beiden Lotfußpunkte E, F innerhalb, der andere außerhalb der ihm tragenden Dreiecksseite liegen, wie das nebenstehend gezeichnet ist. Tatsächlich ist also etwa



$$A B = A F - B F$$
$$A C = A E + C E = A F + B F,$$

und wir dürfen keineswegs auf Gleichheit schließen.

Damit ist das Sophisma vollständig aufgeklärt, und in ganz ähnlicher Weise erklären sich die vielen sonst bekannten Scheinbeweise; stets werden ungenaue Figuren mit verkehrter Anordnung der Punkte und Geraden der Argumentation zu Grunde gelegt.

Habe ich so wesentliche Mängel an Euklids Darstellung kritisiert, so will ich nun andererseits auch eine ihrer größten Feinheiten hervorheben, über die freilich jene früher gekennzeichneten begeisterten Anhänger Euklids meist ebenso hinweggleiten, wie über die Fehler. Ich berichtete bereits, daß im fünften Buch das Verhältnis [Logos] irgend zweier geometrischen Größen a, b betrachtet wird, das das Aequivalent des allgemeinen Zahlbegriffes gibt. Nun setzt aber Euklid

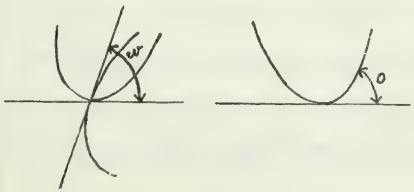
hierbei ausdrücklich fest, daß er von einem Verhältnis zweier gleichartiger geometrischer Größen a, b nur unter einer gewissen Bedingung sprechen will: wenn nämlich zwei ganze Zahlen n und n derart sich bestimmen lassen, daß $n \cdot a > b$ und $a < n\,b$ wird; seine Worte sind „Ein Verhältnis haben Größen, die vervielfältigt einander übertreffen können". Diese Forderung nennt man heutzutage Archimedisches Axiom, und sie spielt in den modernen Untersuchungen über Grundlagen der Arithmetik und Geometrie eine große Rolle; freilich ist der Name durchaus unhistorisch, da eben Euklid lange vor Archimedes und sogar vor ihm wahrscheinlich schon Eudoxos dies Axiom besaß, aber er ist nun einmal leider üblich geworden.

Wir haben nun bereits in der letzten Wintervorlesung [1] von diesem Archimedischen Axiom gesprochen. Da nannten wir eine Größe a, die nach Multiplikation mit jeder endlichen Zahl n immer noch kleiner als b blieb, aktual unendlich klein in Bezug auf b, oder umgekehrt b aktual unendlich groß in Bezug auf a. Was Euklid durch seine Forderung ausschließt, sind also Systeme geometrischer Größen, die aktual unendlich kleine oder große Elemente enthalten, und in der

1) Vgl. Teil I, S. 476 - 479.

Tat ist es notwendig, solche Systeme auszuschließen, wenn man die Lehre von den Proportionen, die ja schließlich, wie oft betont, nichts als eine andere Form der modernen Theorie der Irrationalzahlen ist, begründen will. Euklid (oder wohl schon Eudoxus) macht also hier – das ist das Bewundernswerte – im Grunde nichts anderes, als was man in den modernen Untersuchungen des Zahlbegriffes tut, und er macht es sogar genau mit denselben Hilfsmitteln.

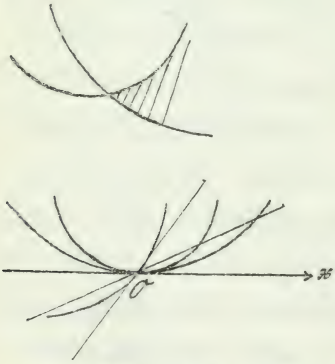
Wir werden die Tragweite des hier in Rede stehenden Axioms am besten erkennen, wenn wir uns ein ganz konkretes ihm nicht genügendes System geometrischer Größen einmal vor Augen führen, das besonders auch darum interessant ist, weil es bereits im Altertum und Mittelalter wohl bekannt und vielfach umstritten war. Ich meine hier die sog. hornförmigen Winkel, das sind Winkel zwischen Kurven in einer gewissen allgemeineren Auffassung. Wenn wir heute von Winkel reden, so denken wir stets an Winkel zwischen geraden Linien und insbesondere unter dem Winkel zweier Kurven verstehen wir nichts als den Winkel ihrer



Tangenten; der Winkel einer Kurve, z. B. eines Kreises mit seiner eigenen Tangente ist dann stets Null. Solcherweise bilden

alle Winkel bekanntlich ein gewöhnliches „Archimedisches" Größensystem, auf das man die Euklidische Verhältnislehre anwenden kann, das also mit anderen Worten durch die einfache Reihe der natürlichen Zahlen gemessen wird, wie man das ja stets tut.

Im Gegensatz dazu versteht man unter dem <u>hornförmigen Winkel zweier Kurven</u> – wobei wir uns im Sinne der alten zunächst auf <u>Kreis und Gerade</u> beschränken wollen – das von den Kurven selbst in der Nähe ihres Schnittes (oder Berührungspunktes) <u>eingeschlossene Flächenstück</u>,

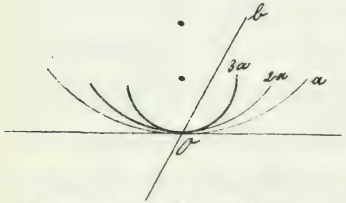


und wir wollen nun sehen, wie diese Definition zu einem <u>nicht-archimedischen d. h. jenem Keimen nicht genügenden Größenbegriff</u> Anlaß gibt. Wir wollen uns dabei auf Winkel beschränken, deren <u>einer Schenkel eine feste Gerade</u> (die x-Achse) ist, und deren Scheitel im Nullpunkt O liegt; der andere Schenkel ist ein Kreis (oder event. auch eine Gerade), der in O die x-Achse schneidet oder berührt. Man wird dann ganz naturgemäß denjenigen von 2 hornförmigen Winkel den <u>kleineren</u> nennen, <u>dessen freier Schenkel beim Zuschreiten auf O schließlich unterhalb</u>

des Schenkels des anderen bleibt, d. h. der dabei schließlich das schmälere Flächenstück begrenzt. Danach wird z. B. der Winkel eines berührenden Kreises stets kleiner sein, als der eines schneidenden Kreises oder einer schneidenden Geraden, und von 2 berührenden Kreisen wird der mit größerem Radius den kleineren Winkel bilden, da er innerhalb des andern verläuft. Es ist klar, daß solcherweise für je zwei unserer hornförmigen Winkel bestimmt ist, welcher von ihnen der kleinere und welcher der größere ist; die Gesamtheit der hornförmigen Winkel ist, wie man heute in der Mengenlehre sagt, nach ihrer Größe „einfach geordnet" - genau wie es auch ja die Gesamtheit der gewöhnlichen reellen Zahlen ist.

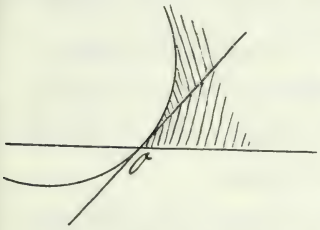
Um nun aber den charakteristischen Unterschied zwischen diesen beiden Anordnungen zu erkennen, müssen wir genaueres über die Messung dieser hornförmigen Winkel festsetzen. Das erste ist, daß wir den Winkel einer Geraden durch O im gewöhnlichen Winkelmaße messen; dann ist jeder Winkel α eines die x - Achse berührenden Kreises nach der Definition kleiner als jeder noch so kleine von Null verschiedene geradlinige Winkel, und das bereits kann im gewöhnlichen Zahlenkontinuum für ein von Null verschiedenes α nicht vorkommen und charakterisiert α als „aktual unendlich klein".

Um das im Zusammenhange mit dem Archimedischen Axiom zu verfolgen, müssen wir zunächst noch auch für diese krummlinigen Winkel die Multiplikation mit einer ganzen Zahl n definieren. Betrachten wir zunächst einen im O berührenden Kreis vom Radius R, so liegt es nahe, dem berührenden Kreise mit dem Radius $\frac{R}{n}$ den n-fachen Winkel zuzuschreiben; tatsächlich fügt sich das der obigen Definition insofern gut ein, als noch ihr die Winkel der berührenden Kreise mit den Radien R, $\frac{R}{2}$, $\frac{R}{3}$ ... immer größer werden. Wohl aber entstehen so aus dem Winkel a eines berührenden Kreises stets wieder Winkel berührender Kreise, und alle Vielfache n.a bleiben daher unserer Definition zufolge notwendig kleiner als etwa der Winkel b einer festen schneidenden Geraden – wie groß auch man n nimmt. Also ist das Archimedische Axiom tatsächlich nicht befriedigt: die Winkel der berührenden Kreise sind demgemäß also aktual unendlich klein gegenüber dem Winkel einer schneidenden Geraden aufzufassen. Was die allgemeine Addition zweier solcher Winkel anlangt, so wird man sie gemäß der gegebenen Definition der Multiplikation mit ganzen Zahlen so



vollziehen, daß man die reziproken Werte der Radien addiert, die überhaupt als Maßzahlen der aktual unendlich kleinen Winkel dienen werden.

Haben wir nun einen beliebigen Kreis durch O, so können wir seinen Winkel als Summe des Winkels seiner



Tangente gegen die α-Achse (im gewöhnlichen Sinne gemessen) und seines eigenen aktual unendlich kleinen Winkels gegen die Tangente im soeben definierten Sinne auffassen; man kann dann Addition und Multiplikation auf die einzelnen Summanden werfen, und hat so das Operieren mit hornförmigen Winkeln vollständig begründet. Für diesen Gebiete gilt aber das streng euklidische Axiom nicht und man kann es daher nicht mit „Logoi" oder gewöhnlichen reellen Zahlen behandeln; gewiß war das Euklid wohlbekannt und er schloß völlig bewußt solche Größensysteme durch sein Axiom aus.

Man kann nun mit modernen Hilfsmitteln das Gebiet dieser hornförmigen Winkel wesentlich ausdehnen, wobei sich die Definitionen noch erweitern und zugleich vereinfachen, wenn man nämlich alle analytischen Kurven durch O in Betracht zieht. Jede solche Kurve

wird durch eine Potenzreihe dargestellt:

$$y_1 = \alpha_1 x + \beta_1 x^2 + \gamma_1 x^3 + \dots, \quad y_2 = \alpha_2 x + \beta_2 x^2 + \gamma_2 x^3 + \dots \text{ etc.}$$

Wir werden nun sagen, daß der Winkel der Kurve 1 gegen die x-Achse größer oder kleiner ist, als der von 2, je nachdem $\alpha_1 > \alpha_2$ oder $\alpha_1 < \alpha_2$; ist aber $\alpha_1 = \alpha_2$, so lassen wir in erster Linie $\beta_1 \gtrless \beta_2$, wenn aber auch $\beta_1 = \beta_2$, so $\gamma_1 \gtrless \gamma_2$ entscheiden, u. s. f. Es ist klar, daß so die Winkel aller analytischen Kurven in eine bestimmte einfach geordnete Reihe gebracht sind, in der offenbar auch die Kreise in der oben definierten Reihenfolge enthalten sind.

Nun wird man einfach also das n-fache des Winkels 1 den Winkel der mit n multiplizierten Reihenentwicklung $n \cdot y_1 = n\alpha_2 x + n\alpha_2 x^2 + \dots$ berechnen können; vorhin mußten wir eine Komplizierte Operation anwenden, um nicht aus dem Gebiet der Kreise herauszukommen, nämlich den berührenden Kreis mit dem Radius R, dessen Reihenentwicklung

$$y = \frac{x^2}{2R} + \frac{x^4}{8R^3} + \dots$$

ist, durch den mit dem Radius $\frac{R}{n}$:

$$y = n \cdot \frac{x^2}{2R} + n^3 \frac{x^4}{8R^3} + \dots$$

ersetzen, was nur im ersten Glied der Reihenentwicklung wirklich Multiplikation mit n darstellt. Aber auch nach der neuen einfachen Definition haben wir wieder ein gegen früher erweitertes nichtarchimedi-

sches Grösssensystem: Eine Kurve, deren Entwickelung erst mit x^2 beginnt ($\alpha_2 = 0$) wird nach Multiplikation mit noch so grossem n stets einen kleineren Winkel bilden, als eine mit nichtverschwindendem α_1. Wir haben hier im Grunde nur das in etwas anschaulicher Form wiederholt, was wir schon in der Wintervorlesung [1] gemacht hatten: In der Potenzentwickelung

$$y = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \dots$$

spielen bei dieser Deutung die sukzessiven Potenzen $x, x^2, x^3 \dots$ einfach die Rolle aktual unendlich kleiner Grössen von verschiedener nunmehr ausgezeichneter Ordnung.

Es ist nun interessant, dass man die Folge der horizontaleren Winkel noch weiterhin verdichten kann, indem man gewisse nichtanalytische Kurven hinzunimmt; nur dürfen sie, um eine Grössenvergleichung zu gestatten, nicht unendlich oft oszillieren, oder genauer gesagt keine analytische Kurve unendlich oft schneiden. Es mag genügen, wenn ich hier als einziges Beispiel die Kurve $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$ hervorhebe; sie hat bekanntlich die Eigenschaft, dass alle ihre Differentialquotienten bei $x = 0$ verschwinden (sodass sie daselbst überhaupt in keine Potenzreihe entwickelbar ist), und da-

1) loc. cit. S. 477, wo jene Grössen verschiedener Ordnung $\eta, \xi \dots$ heissen.

her verläuft sie schließlich unterhalb jeder analytischen Kurve. Trotzdem wir also vorhin schon eine so dichte Folge hornförmiger Winkel hatten, haben wir einen neuen hornförmigen Winkel, der mitsamt seinen endlichen Vielfachen kleiner ist als jeder Winkel einer analytischen Kurve!

Wir wollen damit diese Betrachtungen, und überhaupt unser Studium der Euklid abschließen; ich fasse nur noch zum Schluß das Urteil über Euklids Elemente, das wir in allen diesen Erörterungen gewonnen haben, in wenige Sätze zusammen:

1.) Die große historische Bedeutung von Euklids Elementen besteht darin, daß durch sie das Ideal einer lückenlos-logischen Behandlung der Geometrie den kommenden Zeiten überliefert wurde.

2.) Was die Ausführung angeht, so ist vieles sehr fein gemacht, vieles andere aber bleibt prinzipiell hinter unserem heutigen Standpunkt zurück.

3.) Zahlreiche Einzelheiten wichtiger Art, namentlich am Anfange des ersten Buches, bleiben wegen Unsicherheiten des Textes durchaus zweifelhaft.

4.) Die ganze Entwicklung erscheint häufig unnötig schwerfällig, da Euklid keine fertige Arithmetik zur Hand hat.

5.) Überhaupt aber erschwert die einseitige Beto-

mung des Logischen das Verständnis des Gesamtinhaltes und seines inneren Zusammenhanges.

Wir wollen damit, meine Herren, überhaupt die Erörterungen über die Theorieen der Geometrie beenden, die Ihnen hoffentlich den erwünschten Überblick über dies ganze Gebiet verschafft haben, soweit es an den Bedürfnissen des Schulunterrichtes nur irgend Bezug hat. Und nun wollen wir zum Schluß, wie ich es ja schon ankündigte, endlich noch im Zusammenhange davon handeln, worauf ich ja oft schon gelegentlich hinwies:

Anhang:

Einiges über den Unterricht in der Geometrie.

Hierbei wird die Darstellung ganz naturgemäß einen wesentlich historischen Charakter erhalten, vielmehr noch als bei den entsprechenden Erörterungen im vorigen Semester, da die Geometrie entsprechend ihrem ehrwürdigen Alter als Wissenschaft auch auf eine so lange Tradition als Unterrichtsfach zurückblicken kann, wie keine der früher besprochenen Disziplinen. Ist eine solche Tradition auch nach der einen Seite hin ein Vorzug, so birgt sie doch in anderer Hinsicht schwere Gefahren; in der Tat krankt der geometrische Unterricht heute geradezu an seiner alten Tradition, denn es sind ihm viele nicht mehr eigentlich lebensfähige Be-

standteile jetzt so fest eingenistet, daß sie schwer zu beseitigen sind, und sogar das Heraufkommen neuer gesunder Gebiete auf alle Weise erschweren.

Wollen wir die heutige Gestaltung des geometrischen Unterrichts verstehen, so müssen wir auf die Zeit des Wiedererwachens wissenschaftlicher Betätigung, die Renaissance im weitesten Sinne gefaßt (von 1200 an), zurückgehen. Da war es ganz naturgemäß, daß man an die Alten anknüpfte, und besonders die Elemente des Euklid als Einleitung in die Geometrie studierte. Dazu nahm man noch die sonstigen Bestandteile der Geometrie der Alten, die man besaß; also in erster Linie die Berechnung von π durch Archimedes, die Kegelschnittlehre des Apollonius, endlich das Interesse für die Konstruktionen mit Zirkel und Lineal, wie sie auf die Platonische Schule zurückgehen. Dieser geometrische Stoff ist natürlich äußerst einseitig gewählt; nicht nur das Interesse an den Anwendungen, sondern auch die Berücksichtigung der Raumanschauung wird ganz zurückgedrängt, und ausschließlich die abstrakte Seite der Ableitung berücksichtigt. Nun ist aber das Merkwürdige, daß nicht nur der Forscher, der Gelehrte so Geometrie trieb, sondern daß die Ansicht sich bildete, Euklids Elemen-

sie seien ein geeignetes Schulbuch für den ersten Unterricht! Mag diese Verwechslung damals auch nahe gelegen haben, da man nichts anderes als den Euklid hatte, Euklids eigner Meinung entspricht sie sicher nicht, denn die Elemente sind — das kann man nicht oft genug betonen — aus Universitätsvorlesungen hervorgegangen und sind alles weniger, als ein Lehrbuch für zehnjährige Knaben. Und dieses Mißverständnis sollte dann bis zur heutigen Zeit wesentlich nachwirken!

Fragen wir nun demgegenüber zunächst einmal, was für Anforderungen man heute an einen gesunden geometrischen Schulunterricht wird stellen müssen. Da wird

1) jedermann zugeben, daß die psychologischen Gesichtspunkte wesentlich maßgebend sein müssen. Der Unterricht kann nicht nur vom Stoff abhängen, sondern es kommt vor allem auch auf das Subjekt an, das man zu unterrichten hat; man wird ein und dieselbe Sache einem sechsjährigen Knaben anders darstellen müssen, als einem zehnjährigen, und diesem wiederum anders, als einem gereiften Manne. Wenn das speziell auf die Geometrie anzuwenden, wird man auf der Schule stets zuerst an die lebhafte konkrete Anschauung anknüpfen müssen, und wird erst

allmählich logische Elemente in den Vordergrund bringen können; überhaupt wird sich die genetische Methode allein als berechtigt erweisen, die den Schüler langsam in die Dinge hineinwachsen läßt.

2.) Was die Auswahl des Stoffes anlangt, so werden wir aus dem Gesamtgebiet der reinen und angewandten Geometrie solche Stücke herauszunehmen suchen, wie sie dem Zweck der Geometrie im Rahmen des gesamten Unterrichts zu entsprechen scheinen, ohne uns dabei von historischen Zufälligkeiten beeinflussen zu lassen. Es ist nicht nötig, solche allgemeinen Forderungen immer wieder aufzustellen; denn wenn sie auch jeder theoretisch zuzugeben geneigt ist, werden sie dann doch in der Praxis nicht ausgeführt.

3.) Was den allgemeinen Unterrichtszweck betrifft, so kann ich hier auf die feineren Nuancierungen zwischen den einzelnen Schularten nicht eingehen. Es genüge zu betonen, daß er außerordentlich von der jeweiligen Kulturrichtung der Zeitepoche abhängt; und wir reden gewiß keinem flachen Utilitarismus das Wort, wenn wir als Zweck der modernen Schule bezeichnen, weite Kreise tüchtig zu machen zur Mitwirkung an der im wesentlichen auf praktische Betätigung gerichteten heutigen Kulturarbeit; daher er-

weist sich speziell für den mathematischen Unterricht eine immer stärkere Berücksichtigung der Naturwissenschaften und der Technik als nötig.

4.) Eine bestimmte Stoffauswahl kann ich gewiß hier nicht bieten; sie kann nur der praktische Schulmann treffen, der selbst reiche Erfahrung im Unterrichten hat. Die gegenwärtige Vorlesung soll, wie ich schon oft betonte, nur in Gestalt eines Überblickes über die gesamte reine Geometrie Ihnen auch von dieser Seite her das Material an die Hand geben, das Sie später zu einem eigenen sachverständigen Urteil über diese Frage befähigt.

5.) Nur einen mehr methodischen Gesichtspunkt möchte ich noch hier hervorheben, nämlich die schon öfters erwähnte Tendenz der Fusion des planimetrischen und stereometrischen Unterrichts; die eine einseitige Ausbildung in der Planimetrie und Vernachlässigung der dreidimensionalen Raumanschauung verhindern will. Und im selben Sinne ist auch weiterhin eine Fusion der Arithmetik und Geometrie zu verlangen, nicht als ob diese Gebiete völlig verschmolzen werden sollen, aber sie sollten doch nicht so scharf getrennt werden, wie dies heute an der Schule wohl vielfach geschieht; der ganze Gang dieser und der vo-

rigen Vorlesung zeigen ja, wie ich das aufgefaßt wissen möchte.

Messen Sie nun an diesen Gedanken und Forderungen die wirkliche Schulpraxis, so wird sie vielfach durchaus nicht befriedigen können. Freilich ist es schwer, ein allgemeines Urteil abzugeben, da selbst innerhalb eines und desselben Landes an jeder Anstalt, ja fast bei jedem Lehrer eine verschiedene Praxis herrscht; aber ich denke doch, daß ich einige wenige im großen Durchschnitt richtige Züge festhalten kann, wenn sich auch jeder einzelnen Aussstellung gegenüber gewiß zahlreiche Fälle aufweisen lassen, wo sie durchaus nicht zutrifft.

1) Vor allem glaube ich, daß die Fusion der verschiedenen Gebiete heutzutage im Unterricht viel zu wenig durchgeführt ist; ich will das durch einige Einzelheiten belegen, die Sie vielleicht auch noch in lebendiger Erinnerung haben:

a) Das Projizieren und Zeichnen räumlicher Figuren, das gewiß etwas äußerst wichtiges ist, kommt im heutigen geometrischen Unterricht nicht recht zur Geltung. Es wird wohl äußerlich dem Lehrgang angeheftet, aber nicht innerlich mit ihm verschmolzen. Damit hängt zusammen, daß das, was man „Geist der neueren Geometrie" nennt, im Unterricht nicht die ge-

berührende Stellung einnimmt, ich meine die Idee der Beweglichkeit einer jeden Figur, durch die jedesmal über den speziellen Fall hinaus der allgemeine Charakter der geometrischen Gebilde erfaßbar wird. Wohl hat man einzelne Kapitel der neueren Geometrie, wie die Lehre von den harmonischen Punkten und den Transversalen, in den Lehrgang aufgenommen, aber was da die neuere Geometrie mit einem Blick zu fassen gestattet, stellt man gewöhnlich in der starren Euklidischen Manier, in zahlreiche Fallunterscheidungen zerlegt, dar.

b) Die Geometrie und Arithmetik hält man auf der Schule gewöhnlich unnatürlich getrennt voneinander; ein lehrreiches Beispiel ist die oben (S. 398) schon erwähnte Behandlung der Proportionen, die man zuerst arithmetisch, und dann – häufig noch ohne Bezugnahme darauf – in geometrischer Form durchnimmt.

c) Die analytische Geometrie mit dem Grundsatz, daß eine Funktion $y = f(x)$ eine Kurve darstellt, ist gewiß der Auffassung der Knaben schon auf früher Stufe zugänglich und sie könnte und sollte von da an den ganzen geometrischen Unterricht durchdringen. Statt dessen wird sie als neuer getrennter Aufbau auf die fertige Geometrie aufgesetzt, und wenn man die Kegelschnitte einmal „synthetisch" (im Sinn der Alten!) behan-

delt hat, wird nun gezeigt, wie sich mit Hilfe einer „neuen Disziplin", der analytischen Geometrie, die Sache viel einfacher machen läßt. Die tiefere Auffassung der modernen Geschichtsforschung, daß auch bei Apollonius die Ideen der analytischen Geometrie im Grunde schon vorhanden waren, kommt dabei freilich auch nicht zur Geltung.

2.) Ich möchte nun einen Blick darauf werfen, was für wissenschaftliche Folgen dies Beharren des Unterrichts in der historisch gegebenen Trennung der einzelnen Gebiete gehabt hat. Natürlich gibt die Elementargeometrie auch in ihrer von mir beklagten historischen Begrenzung zu wissenschaftlichen Problemen vielfach Anlaß. Was Literatur anlangt, möchte ich nur auf Hoxx Simons Referat „Über die Entwicklung der Elementargeometrie im 19. Jahrhundert" [1] verweisen, andererseits aber die interessante Sammlung von Enriques nennen: „Questioni riguardanti la geometria elementare", [2] deren zweiter Teil auch in deutscher Übersetzung von Fleischer [3] erschienen ist; endlich wäre noch die „Theorie der geometrischen Konstruktionen" [4] von Adler hervorzuheben.

1.) Jahresber. d. d. Math.-Verein. Ergänzungsband I. Leipzig 1906.
2.) Bologna 1900.
3.) Fragen der Elementargeometrie. T. I: Geometrische Aufgaben, Lösung und Lösbarkeit. Leipzig 1907.
4.) Samml. Schubert 52. Leipzig 1906.

Ich kann auf die positive Seite der hier einschlagenden Probleme leider nicht eingehen, muß mich vielmehr darauf beschränken, einige arge Mißstände hervorzuheben, die sich infolge der isolierten Stellung der Elementargeometrie fern von der allgemeinen Entwicklung der Mathematik herausgebildet haben. Es sind da einzelne Gebiete weit ausgesponnen und auch in den Schulunterricht eingeführt worden, die vom höheren Standpunkte aus von sehr geringem Interesse sind.

a) Ich habe da zuerst die auf der Schule als algebraische Geometrie bezeichnete Disziplin zu nennen, die Stücke des Dreiecks oder anderer Figuren erst zu berechnen und dann gesondert für sich zu konstruieren lehrt. Sie haben einen Maßstab für die Wertung dieser Gebiete, wenn Sie sich fragen, ob Sie sie jemals im Hochschulunterricht benutzt haben oder hätten benutzen können. Das ist hier gewiß nicht der Fall, es handelt sich eben nur um ein Seitenästchen, das nur um seiner selbst willen künstlich gepflegt worden und niemals mit anderen Zweigen der Wissenschaft in lebendige Wechselwirkung getreten ist.

b) Berührt ist auch das Gebiet der Dreieckskonstruktionen. Daß man überhaupt Figuren konstruiert, ist sehr schön und nützlich, und ich empfehle gewiß immer

die Benutzung graphischer Verfahren auf allen Gebieten, wo sie ja die moderne Mathematik mehr und mehr heranzieht; Sie haben gerade hier in Göttingen in Prof. Runges Vorlesungen über graphische Methoden die beste Gelegenheit, die zahlreichen in neuerer Zeit entwickelten äußerst sinnreichen Methoden kennen zu lernen. Aber um solche allgemein wichtige und interessante Dinge handelt es sich auf der Schule nicht; da beschränkt man sich vielmehr ganz überwiegend auf Konstruktion von Dreiecken, und noch dann auf solche Aufgaben, die mit Zirkel und Lineal lösbar sind. Bekanntlich kann man dann noch die gegebenen 3 Stücke des Dreiecks auf äußerst mannigfache und – wie man wohl gesagt hat – „auf möglichst unzweckmäßige Weise" wählen; dabei legt man dann auf die wirkliche Ausführung der Konstruktionen, die man so findet, vielfach gar keinen Wert, und tatsächlich sind sie infolge der künstlichen Beschränkung der Hilfsmittel für die Praxis meist auch viel zu komplizirt. Nun sind ja gewiß auch theoretisch sehr interessante Fragen mit solchen Konstruktionen verknüpft, wie sie etwa in dem genannten Werke von Enriques behandelt werden oder an einigen Beispielen auch im vorigen Semester von uns

erörtert worden sind: [4] ich meine die algebraischen Unmöglichkeitsbeweise, die zeigen, warum man bei gewissen Konstruktionen (z. B. der Konstruktion der regulären Siebenecks oder der Dreiteilung des beliebigen Winkels) gerade nicht mehr mit Zirkel und Lineal durchkommt. Davon aber ist auf der Schule in der Regel auch nicht andeutungsweise die Rede, und so setzt sich dann immer aufs neue leider bei vielen Leuten die Überzeugung fest, jede geometrische Aufgabe müsse sich mit Zirkel und Lineal durchführen lassen; darin ist auch wohl der Grund zu suchen, daß jene große Schar der Kreisquadrierer und Winkeldreiteiler, von denen ich Ihnen schon im vorigen Semester sprach, niemals ausstirbt.

c.) Endlich habe ich noch die sog. Dreiecksgeometrie zu nennen, das ist die Lehre von den „merkwürdigen" Punkten und Geraden des Dreiecks, die ganz besonders innerhalb der Schulmathematik als selbständige Disziplin ausgebildet worden ist; auch hier werden Sie mir bestätigen, daß dies Gebiet in demselben Maße, wie es im Schulunterricht in den Vordergrund zu treten pflegt, bei weitergehenden Studien zurücktritt. Wir haben ja früher schon erläutert, in welcher Ecke der projektiven Geometrie diese Dreiecksgeometrie einzuordnen ist (vgl. S. 321 f.).

---

4) s. Teil I S. 125 ff. (Hebenecke) S. 257 (Trisektion).

Es handelt sich nun die Invariantentheorie derjenigen ebenen Figur, welche aus drei beliebigen Punkten und den beiden imaginären Kreispunkten ihrer Ebene gebildet ist, also tatsächlich nun etwas durchaus Partikuläres.

Wollen wir nun aber über diese allgemeine Kritik hinaus Näheres über die gegenwärtige Gestaltung des geometrischen Unterrichts sagen, so müssen wir die Entwicklung in den einzelnen Ländern gesondert behandeln, da sie sich überall natürlich ganz verschieden gestaltet hat; wir können hier freilich nur die wichtigsten Kulturländer, sagen wir England, Frankreich, Italien und Deutschland, durchsprechen.

Beginnen wir mit

I. dem Unterricht in England,

der am längsten im Banne der mittelalterlichen Euklidtradition stand, und zum Teil noch heute steht. Diese Sachlage wird bedingt durch die Organisation der englischen Examina; denn das schöne Prinzip, daß man unabhängig vom Examen lernen soll, wird wie so viele andern schönen Prinzipien beider wirgendwo befolgt. In England herrscht nämlich das merkwürdige System des streng zentralisierten Examens bei sonst völlig unabhängiger, privater Organisation der einzelnen Schulen. Es ist gerade umgekehrt, wie bei uns: Bei uns wird an

jeder einzelnen Schule der Schüler von den Lehrern geprüft, die ihn genau kennen und dabei soll seiner Individualität weitgehend Rücksicht getragen werden; dafür haben wir aber einheitliche Lehrpläne, die hinsichtlich des Stoffes und der Gestaltung des Unterrichts für alle Schulen bestimmte allgemeine Richtlinien vorschreiben. Demgegenüber sind in England die einzelnen Schulen private Institutionen, die an sich fast vollständige Bewegungsfreiheit haben und ihrer ganzen Organisation nach heterogenster Art sind. Aber prüfen dürfen sie ihre Schüler nicht selbst, vielmehr besteht gerade das Prinzip, daß der Examinator den Prüfling nicht kennt, ja nicht einmal sieht, sondern daß er ganz schematisch lediglich seine schriftliche Leistung beurteilt, und daß deren Ausfall allein das Examen entscheidet. In London, Cambridge und Oxford befinden sich die großen Examenskommissionen, die die Absolventen der ganzen Landes prüfen. Von London aus werden z. B., wie mir einer der Hauptexaminatoren berichtete, 24000 Schüler jährlich geprüft, und die erhalten nun alle dieselben Aufgaben, dieselben Fragen. Der Examinator hat zur Durchsicht dieser Aufgaben 30 Assistenten, von denen jeder also noch 800 mal dieselbe Arbeit zu korrigieren hat; natürlich fände sich zu dieser Arbeit niemand, wenn

sie nicht so gut bezahlt würde.

Im mathematischen Unterricht ist nun ein solches eigentümliches Verfahren nur möglich, wenn es ein „standard-work" gibt, das jeder Examinand kennt, und das der Examinator seinen Fragen zu Grunde legen kann; als solches Normalbuch fungieren in England von altersher, was Geometrie angeht, die Euklidischen Elemente. Es ist verständlich, daß sich bei einem solchen System ein und dasselbe Werk und damit ein und dieselbe Unterrichtsart so lange wesentlich unverändert erhalten mußte, wie denn überhaupt bei ihm eine Reform mit den größten Schwierigkeiten verknüpft ist. Denn die Examensbehörde kann von sich aus den Unterrichtsbetrieb im ganzen Lande nicht reorganisieren, da sie keinerlei offiziellen Einfluß auf ihn hat, und andererseits ist es eben schwer möglich, auf abweichende Verhältnisse einer einzelnen Schule Rücksicht zu nehmen, die etwa selbständige Versuche mit neuen Unterrichtsmethoden vornehmen wollte.

Sehen wir uns nun einmal einen solchen englischen Schuleuklid an; ich habe hier die Ausgabe von R. Potts[1], die in den letzten Jahrzehnten besondere Verbreitung gefunden hat. Sie enthält lediglich — das ist charak-

1) Euclid elements of geometry. London 1869

teristisch – die Bücher 1 – 6 (Planimetrie) sowie 11, 12 (Anfänge der Stereometrie und Exhaustionsmethode), und zwar alles in wortgetreuer Übersetzung; diesem Stoff sind erklärende und zum Teil historische Noten sowie Aufgaben angefügt. Es fehlen also gegenüber den gesamten Elementen die arithmetischen Bücher 7 – 9, die Klassifikation der Transzendalitäten in 10, und die regulären Körper in 13. Dieser Stoff wird nun traditioneller Weise in den englischen Schulen mehr oder minder auswendig gelernt, damit er im Examen jederzeit zur Hand ist; Perry macht zur Charakteristik dieser Methode einmal die amüsante Bemerkung: „Wie gesund muß die englische Natur sein, daß sie durch die Jahrhunderte eine so ungeeignete Erziehungsmethode ertragen hat." Nun hat man freilich auch die Notwendigkeit empfunden, die moderne über Euklid weit hinausgehende Forschung zu berücksichtigen; das hat man aber, indem man sie gewaltsam in die starre Euklidische Form preßte, wobei natürlich ein guter Teil des modernen Geistes verloren geht. Als Beispiel der so entstandenen sog. „sequels to Euclid" lege ich Ihnen hier das Buch von F. Casey [1] vor, das die Anfangslehren der projektiven Geometrie in dieser Art behandelt.

---

1) A sequel to the first 6 books of Euclid, containing an easy introduction to modern geometry. Dublin 1900.

Natürlich blieb eine Gegenwirkung gegen diese erstarrende System nicht aus; sie knüpfte an eine 1869 von dem großen englischen Mathematiker Sylvester gegebene Anregung an, und führte 1874 zur Gründung einer Association for the improvement of geometrical teaching. Diese Gesellschaft hat lange gearbeitet, bis sie endlich zur Herausgabe eines neuen Normalbuches, der Elements of plane geometry [1] gelangte. Das ist im wesentlichen lediglich eine etwas abgeglichene und geglättete Bearbeitung der ersten 6 Bücher der Euklidischen Elemente; so sind z. B. die Unebenheiten am Anfang des ersten Buches, über die wir uns beklagten, beseitigt, indem der Bewegungsbegriff Kongruenz vorangestellt wird. Im allgemeinen aber ist die Reihenfolge und Stoffbegrenzung des Euklid beibehalten, eben wieder in Rücksicht auf das Examen. Es ist also nur eine ziemlich zahme Reform, die hier versucht wird, und trotzdem hat sie bei den Anhängern des alten Euklidischen Systems schon scharfen Widerspruch gefunden. Als Beleg dafür lege ich Ihnen ein wenigstens recht amüsant geschriebenes Buch von Dodgson vor: „Euclid and his modern rivals". [2] Hier geht der Verfasser scharf mit der

1) P. 1. 2. London 1884. 1885.
2) 2. ed. London 1885.

Association ins Gericht, in wörtlichem Sinne, denn er läßt keinen Geringeren als den Höllenrichter Minos auftreten, vor dem sich Euklid und seine modernen Rivalen, das sind die Verfasser neuerer Lehrbücher, allen voran Legendre, verteidigen; aber Euklid allein schneidet gut dabei ab, während die anderen und besonders die Euklidverbesserer der Association mit ihren Argumenten bald am Ende sind. Ich kann auf Einzelheiten hier unmöglich eingehen, und möchte nur auf einen Umstand von allgemeinerer Bedeutung verweisen, der auch für die Literatur der anderen Länder Geltung hat. Ein großer Teil der Leute, die über Unterrichtsfragen schreiben, kennt nämlich fast ausschließlich die Schulliteratur des eigenen Landes, und hat keine Ahnung weder von parallelen Bestrebungen in anderen Ländern, noch von den Fortschritten der reinen Wissenschaft auf den in Betracht kommenden Gebieten, hier also in den Grundlagen der Geometrie. Man sieht das so recht bei Dodgson, bei dem mit Ausnahme von Legendre (der eine Sonderstellung einnimmt) lediglich englische Schulschriftsteller genannt werden, während auch auf Fortschritte der wissenschaftlichen geometrischen Axiomatik gar keine Rücksicht genommen wird. Man kann diese Bemerkung noch oft machen, vergleichende Betrach-

lungen der verschiedenen Nationen, wie wir sie hier anstellen, sind noch lange nicht genügend gemacht worden.

Eine viel größere Wirkung als die Bewegung der Association hat eine andere Reformaktion von, man könnte geradezu sagen, revolutionärem Charakter in den letzten 10 Jahren gehabt, die an den Namen Perry anknüpft. John Perry ist Ingenieur und unterrichtet an einer der größten technischen Anstalten Londons; von ihm geht eine mächtige Bewegung aus, die die einseitige logische Schulung durch das Euklidstudium auf das schärfste bekämpft und an ihre Stelle einen durchaus auf der Anschauung basierten Unterricht setzen will, der vor allem zur vollständigen Beherrschung der mathematischen Exekutive führen soll. Perry ist vor allem bekannt als Verfasser von Lehrbüchern, die die praktische Einführung der Ingenieurkreise in die Beherrschung der Infinitesimalrechnung zum Ziel haben; ich nenne besonders den „Calculus for engineers" [1] der als „höhere Analysis für Ingenieure" [2] von Fricke und Süchting ins Deutsche übersetzt ist. Daneben ist als für seine Tendenzen charakteristisch noch die kleine Schrift „practical mathe-

1, London 1897.
2, Leipzig 1902.

matics" [1] zu erwähnen, die aus Vorträgen für Arbeiterkreise hervorgegangen ist und in sehr geschickter und packender Weise versucht, die Ideen des Koordinatensystems, der Funktion et. c. unter fortwährender Bezugnahme auf praktische Beispiele einem größeren Publikum zugänglich zu machen.

Das ist alles nicht eigentlich Geometrie, aber durch Perrys Einwirkung hat man den Unterricht auch auf diesem Gebiete umzugestalten gesucht, indem man die sogenannte Laboratoriums-Methode einführte: Da beginnt man denn damit, daß man die Dinge in ihrer praktischen Anwendung lehrt, also Kurven auf Millimeterpapier zeichnet und ausmißt, den Gebrauch des Planimeters übt et. c.; von logischen Deduktionen und Beweisen ist gar nicht mehr die Rede, oder sie werden doch wenigstens sehr stark zurückgedrängt und nur auf das praktische Können kommt es an, so daß wir hier eigentlich den größten denkbaren Gegensatz gegen Euklids Verfahren haben. Diese Bestrebungen kommen ganz zum Ausdruck in dem Harrisonschen Lehrbuche: „practical plane and solid geometry for elementary students;" [2] es beginnt tatsächlich mit der Angabe von

1/ London 1899.
2/ London 1903.

allem dem, was man zum Zeichnen braucht: Zeichenpapier, Zeichenbrett, eine Nadel zum Markieren von Punkten, Bleistift etc. etc. Dann werden praktische Anweisungen für das Zeichnen gegeben, es wird gezeigt, wie man ein Lineal auf seine Geradlinigkeit, einen rechten Winkel auf seine Rechtwinkligkeit prüft, und so wird dann weiter immer unter Voraussetzung der wirklichen zeichnerischen Ausführung und der lebhaften Anschauung in sozusagen rein empirischer Weise die Lehre von den einfachsten ebenen und räumlichen Gebilden entwickelt. Etwas weiter als dieses ganz elementare Buch geht Harrison und Bazandall, practical plane and solid geometry for advanced students including graphic statics", [1] das in derselben empirischen Art bis zur darstellenden Geometrie und den Methoden des graphischen Rechnens heraufführt. Weitere Literatur finden Sie in dem sehr interessanten Bericht „Über Reorganisationsbestrebungen des mathematischen Elementarunterrichts in England" von Robert Fricke, [2] in dem die Perrybewegung eingehend besprochen wird. Recht interessant sind übrigens auch die Berichte über die Diskussionen, die Perry auf der Glasgower und der Johannesburger Tagung (1901 und 1905) der British

1) London 1903.
2) Jahresber. d. deutsch. M.-Ver. 13. (1904) pg. 283 ff.

Association – dem englischen Analogon unserer deutschen Naturforscherversammlung – veranlaßt hat [1] und durch die er eine weitergehende Einwirkung auf den Unterricht in England erreichte.

Ich halte diese Perryschen Tendenzen gewiß für sehr geeignet für Fortbildungsschulen, niedere und mittlere Fachschulen, die praktisch leistungsfähige Handwerker und niedere Techniker heranzuziehen haben; so wird sich, um nur ein nahe liegendes Beispiel zu nennen, an der Mechanikerschule, die jetzt hier in Göttingen in der Gründung begriffen ist, ein mathematischer Unterricht in den Perryschen Bahnen gewiß als recht fruchtbringend erweisen. An höheren Schulen aber erscheint mir die ausschließliche Betonung der praktischen Momente, die der Perryschen Richtung eigen ist, nicht ausreichend, wenn sie auch da gewiß sehr dankenswerte Anregungen geben; so gänzlich wird man aber da die Ausbildung des logischen Denkens durch den mathematischen Unterricht nicht missen wollen, und was man wünschen wird, wird vielmehr ein Mittelding zwischen den beiden möglichen Extremen sein, wo neben dem intuitiven von praktischen Erfahrungen ausgehenden

1) Perry, Discussion on the teaching of mathematics (London 1902). – Ders. at Johannesburg on the teaching of elementary mechanics. (London 1906)

Aufbau der Geometrie doch auch die logischen Beweise nicht zu kurz kommen.

Einem solchen Kompromiß scheinen sich in der Tat unter dem Druck der Perrybewegung gegenwärtig die Examensbehörden in Oxford und Cambridge zu nähern, wie neuere Examensbestimmungen zeigen.[1] An diese schließt das neue Lehrbuch von Godfrey und Siddons an: „Elementary geometry practical and theoretical",[2] das im Vergleich mit den Elementen der Association beträchtliche Fortschritte aufweist. Es beginnt mit einer anschauungsmäßigen Einleitung („experimental geometry") für die erste Stufe, einer geometrischen Propädeutik, wie sie ja bei uns seit lange allgemein üblich ist, aber wie man es in England wohl vorher kaum hatte. Dann folgt der logische Aufbau der Geometrie, der freilich in Stoff und Form wieder nahe Beziehungen zu Euklid aufweist, der aber doch gelegentlich mit neuen Gedanken durchsetzt ist; z. B. wird der Flächeninhalt einer Figur zuerst geradezu so eingeführt, daß man die Figur auf Millimeterpapier zeichnet und die umschlossenen Quadrate zählt. Dies Buch, das man

1) vgl. z. B. Regulations of the Oxford and Cambridge Schools-Examination Board for the Year 1904., wo sich pag. 37 besondere Abschnitte über „Practical Geometry" finden.
2) Cambridge 1904.

wohl als Beleg für die nun endlich einsetzende langsame Modernisierung des englischen Unterrichts ansehen kann, hat gleich ungeheuere Verbreitung gefunden, wie man überhaupt bei dem Riesenbedarf des englischen Kolonialreiches auf dem englischen Büchermarkt mit ganz anderen Ziffern rechnen muß, als bei uns.

Der allgemeinen Konservativität des englischen Schulwesens widerspricht nicht, daß einzelne Autoren äußerst freie und interessante Ausführungen über den Unterricht entwickeln, ohne damit eben direkt eine Organisationsänderung in die Wege leiten zu wollen oder zu können. Als Beispiel nenne ich das neue Buch von Brandford, „A study of mathematical education, including the teaching of Arithmetic“ [1]. Es enthält äußerst interessante Studien über die psychologischen Bedingungen des Unterrichts, und nimmt besonders Rücksicht auf den Parallelismus, der zwischen der Entwicklungsgeschichte des Kindes und der Stammesgeschichte besteht; dabei kommt das mathematische Verständnis des Kindes, an das sich der erste Unterricht wenden muß, also mit der Mathematik der Naturvölker in Parallele.

Daneben möchte ich „the first book of geometry“ [2] von G. und W. H. Young nennen, das kürzlich von

1.) Oxford 1905.
2.) London 1905.

Prof. Bernstein unter dem Titel „der kleine Geometer" [1] deutsch herausgegeben worden ist. Hier soll ein neuer origineller Weg gewiesen werden das Kind in das geometrische Verständnis und zwar bald in die dreidimensionale Raumanschauung einzuführen; die leitende Idee ist, daß die natürliche Raumanschauung notwendig erlahmen muß, wenn man das Kind von vornherein ausschließlich an das Zeichnen auf dem zweidimensionalen Papier gewöhnt und so seine Anschauung räumliche auf die Ebene beschränkt. Es wird dann von vornherein mit dem interessanten Hilfsmittel des Papierfaltens operiert, wodurch allein mit Hilfe von Streichhölzern, alle möglichen räumlichen und ebenen Figuren gebildet werden. Dabei ergeben sich auch äußerst anschauliche und doch gleichzeitig logisch befriedigende Beweise z. B. für den pythagoräischen Satz, und es entsteht überhaupt ein neuer interessanter, auch für den höheren Betrieb durchaus in Betracht kommender Aufbau der Geometrie.

Doch nun verlassen wir die englischen Verhältnisse und wenden uns zu

II. dem Unterricht in Frankreich,

der für uns um so interessanter ist, als er auch auf deutsche

[1] Deutsch von S. und F. Bernstein Leipzig und Berlin 1908.

Land sehr eingewirkt hat. Hier zeigt sich ein von England grundverschiedenes Bild; während der Engländer streng konservativ an den alten Einrichtungen hängt, liebt der Franzose das Neue und führt es oft nicht erst durch stetige Umbildung des Alten ein, sondern durch plötzliche Reformation, die schon mehr Revolution ist. Auch die Organisation des Unterrichts ist ganz verschieden: Wir haben in Frankreich nicht nur Zentralisisation des Examens – vermöge der Aufnahmeprüfungen an den Hochschulen, vor allem an denen in Paris – sondern überhaupt eine streng zentralisierte Unterrichtsorganisation; die oberste Behörde, der conseil d'instruction supérieure, dem übrigens stets auch wissenschaftlich bedeutende Mathematiker ersten Ranges angehörten, ist unbedingter Herrscher und kann nach eigenem Ermessen die weitgehendsten Reformen und Änderungen vorschreiben, so oft sie will. Solche Reformen müssen dann im ganzen Lande sofort durchgeführt werden, und die Lehrer können ansehen, wie sie damit zurechtkommen. Die individuelle Freiheit des einzelnen Lehrers, an die wir in Deutschland im hohen Grade gewöhnt sind, kommt hier viel weniger zur Geltung. Man könnte geradezu von einem „System der Revolutionen von oben" reden.

Was nun speziell den geometrischen Unterricht an-

langt, so beginnt seine Modernisierung d. h. die Befreiung von der strengen Bindung an Euklid in Frankreich schon sehr früh, etwa um 1550, um eine runde Zahl zu nennen; sie ist nur eine Erscheinung in dem grossen Kampfe des neuen Humanismus gegen die alte Scholastik, der sich um jene Zeit abspielte. Damals schrieb Petrus Ramus, der auch auf andern Gebieten als der Mathematik unter den Vertretern der neuen Ideeen eine hervorragende Stelle einnahm, ein Lehrbuch der Mathematik („Arithmeticae libri 2, geometricae libri 27." [1]). Hier wird bereits Euklids Form und Euklids Stoff völlig verlassen; vielmehr ist für Ramus, wie er charakteristischer Weise bald an der Spitze des ersten Buches sagt, die Geometrie die Kunst gut zu messen („ars bene metiendi"). Demgemäss stehen die praktischen Interessen durchaus voran; er erklärt vor allem, wie man einfache geodätische Abmessungen ausführt, beschreibt die Instrumente und erläutert das alles an zahlreichen interessanten Abbildungen. Erst in zweiter Linie werden auch logische Deduktionen herangebracht, aber keineswegs als Selbstzweck, sondern nur um neue aus der Beobachtung nicht unmittelbar abzunehmende und doch zur Anwendung nützliche geometrische Sätze abzuleiten, so weit

1) Basel 1580.

wie bei Perry wird freilich die Deduktion doch wohl nicht zurückgedrängt.

Diese Behandlung der Geometrie hat sich in Frankreich lange in Geltung erhalten. Rund 200 Jahre nach Ramus sind die berühmten „Elemens de géometrie"[1] von Clairaut entstanden. Das ist derselbe Clairaut, der als hervorragender Forscher bekannt ist, wie wir denn auch sonst in Frankreich im Gegensatz zu Deutschland und England die Wahrnehmung machen können, daß sich hervorragende Forscher stets der Unterrichtsfragen mit Interesse annehmen. Clairauts Werk zeichnet sich durch seinen ausgezeichneten Stil aus; überhaupt besitzen ja die Franzosen die Kunst der fortlaufenden, lesbaren Darstellung auch schwieriger, abstrakter Dinge in hohem Maße, die der schärfste Gegensatz zu der langweiligen, schablonenhaft gegliederten „Euklidischen" Manier ist. Solche Bücher lesen sich „wie ein Roman", und widerlegen damit die alte Ansicht, gute wissenschaftliche Bücher müßten langweilig geschrieben sein, aufs schlagendste. Was nun den Inhalt anlangt, so geht auch Clairaut durchaus von praktischen Problemen des Feldmessens aus, und führt dann ganz allmählich zu allgemeinen Ideenbildungen empor, wobei das streng

[1] 1741. – Neue éd. Paris 1830.

logische Moment etwas zurücktritt. Er setzt in seiner sehr interessanten Vorrede auseinander, warum er diese Anordnung wählt: Die praktischen Probleme des Feldmessens sind es, die die Menschen überhaupt zur Ausbildung einer geometrischen Wissenschaft angeregt haben, und darum wird man, wenn man sie voranstellt, auch jetzt noch jeden Menschen ganz anders für die Geometrie interessieren können, als wenn man mit einem abstrakten Gebäude von Axiomen und Theoremen beginnt, dessen innerer Sinn niemand so bald begreifen kann. Clairaut hat hier offenbar die Tendenz, sein Werk auch für weitere nicht eigentlich fachmännische Kreise genießbar zu machen, wie denn ja damals tatsächlich die Mathematik in ungleich höherem Maße zur allgemeinen Bildung der führenden Gesellschaftsschichten gehörte, als es heute der Fall ist.

Eine neue Epoche der Unterrichtsgestaltung tritt am Ende des Jahrhunderts ein in Gefolge der großen Umwälzungen durch die französische Revolution von 1789. Handelte es sich bisher wesentlich immer nur um die Ausbildung der höheren Stände, speziell auch um die Vorbildung zur Offizierslaufbahn, so treten jetzt neue soziale Schichten des Bürgertumes in den Vordergrund und der Unterricht erhält neue Ziele und

Methoden. Ich habe da 2 Richtungen der Entwicklung hervorzuheben, die an die beiden damals gegründeten Pariser Hochschulen, die *école polytechnique* und die *école normale supérieure* anknüpfen; die erstere ist, im Zeichen der neu emporwachsenden Technik, zur Ausbildung von Ingenieuren und Generalstabsoffizieren, die andere zur Heranziehung von Oberlehrern bestimmt. An der école polytechnique war der einflußreichste Mann der berühmte *Monge*; er hat dort die geometrischen Unterrichtseinrichtungen geschaffen, wie wir sie noch heute an den technischen Hochschulen und ähnlichen Institutionen haben, vor allem den großen Kursus in darstellender Geometrie, und in analytischer Geometrie. Die wesentliche Neuerung gegen den früheren Betrieb ist dabei, daß nicht nur wenige besonders interessierte Hörer gefördert werden, sondern daß durch zweckmäßige Organisation gleichzeitig eine große Anzahl von Studierenden in eigener Arbeit fruchtbringend beschäftigt ist. Auf die Zeitgenossen von Monge machte es einen großen Eindruck, als er zum ersten Male Übungen leitete, in denen vielleicht 70 Personen gleichzeitig an ihren Zeichenbrettern arbeiteten.

An der école normale andererseits wirkte *Legendre*, der durch seine 1794 zum ersten Male erschienenen berühmten *Éléments de géométrie* auf den geometrischen

Unterricht auf lange Zeit hinaus einen beherrschenden Einfluß ausgeübt hat; ich kann Ihnen hier die 4. Auflage dieses Buches [1] vorlegen. Dies Werk hat nächst Euklids Elementen unter allen Lehrbüchern der Elementargeometrie die weiteste Verbreitung gefunden, und zwar bemerkenswerterweise – ich deutete es schon an – nicht nur in Frankreich, wo es das ganze 19. Jahrhundert hindurch immer wieder neu aufgelegt wurde, sondern auch in anderen Ländern; namentlich in Amerika und Italien nahm es lange Zeit hindurch eine maßgebende Stellung ein.

Im Vergleich zu Clairaut oder gar Petrus Ramus bedeutet Legendres Buch einen <u>großen Schritt auf Euklid hin</u>; sein Hauptziel ist wieder ein in sich geschlossenes abstraktes System der Elementargeometrie. Andererseits bestehen aber doch <u>wesentliche Unterschiede Euklid gegenüber</u>, die ich in Anbetracht der großen historischen Bedeutung Legendres nun gern ausführlicher darlegen will:

1.) Was zunächst den <u>Stil der Darstellung</u> anlangt, so hat Legendre einen <u>zusammenhängenden bequem lesbaren Text</u>; er nähert sich in seiner äußeren Form viel mehr der Clairautschen Darstellung, die ich vorhin rühmte, als der in Lehrsatz und Beweis zergliedern-

[1] Paris 1802.

ben, fast möchte ich sagen zerhackten, in ihrer Einförmigkeit langweiligen Schreibweise Euklids.

2.) In Hinsicht auf den Inhalt ist wohl der wesentliche Punkt, daß Legendre im Gegensatz zu Euklid in der Geometrie bewußten Gebrauch von der elementaren Arithmetik seiner Zeit macht; er ist also, um diesen Ausdruck zu gebrauchen, Anhänger der Fusion von Arithmetik und Geometrie, und begreift sogar in diese Fusion noch weiterhin die Trigonometrie ein, die er gleichfalls in seinem Werke behandelt.

3.) Der prinzipielle Standpunkt Legendres ist gegenüber dem Euklids ein wenig von der logischen nach der anschauungsmäßigen Seite verschoben. Euklid legt – ich habe das ja oft genug betont – allen Nachdruck auf das logische Raisonnement, das er wenigstens der Tendenz nach von der Einmischung von Anschauungselementen frei hält; alles was er an Tatsachen der Anschauung zu brauchen meint, stellt er vorher in seinen Axiomen et. c. zusammen. Demgegenüber kommt es Legendre nicht darauf an, auch innerhalb seiner Deduktionen geometrischer Sätze gelegentlich anschauliche Überlegungen zu verwenden.

4.) Um mehr in Details einzugehen, ist es besonders interessant, die Behandlung der Irrationalzahlen bei beiden Autoren zu vergleichen. Im Buch 5 von Euklid

wird – wie wir wissen – der Begriff der Irrationalzahl unter der Form des Logos oder Verhältnisses zweier inkommensurablen Größen ausführlich definiert und untersucht, in völliger Analogie mit der modernen Theorie der Irrationalzahl; im weiteren Verlauf führt Euklid dann die Beweise der Sätze, in die dem Wesen der Sache nach Irrationalzahlen eingehen, immer ganz besonders sorgfältig mit einer geradezu modernen Anforderungen genügenden Strenge durch (Exhaustionsbeweis!). Legendre aber gleitet über alle diese Punkte kurz hinweg; die Zahlen, rationale und irrationale nimmt er aus der Arithmetik als bekannt an, in der man sich freilich damals über ihre strenge Begründung auch nicht viel Kopfzerbrechen machte. Und Exhaustionsbeweise oder dgl. kennt er nicht; es ist ihm ohne weitere Erläuterung ganz selbstverständlich, daß ein für alle rationalen Zahlen giltiger Satz auch für alle irrationalen gilt. Auch hierin stimmt er übrigens mit allen anderen großen Mathematikern seiner Zeit überein; ich habe gerade im vorigen Semester ein Beispiel dieser Auffassung in Lagranges „Calcul des fonctions" Ihnen vorgelegt.[1])

5.) Trotz dieser freieren Stellung Legendres hinsichtlich der logischen Strenge der Einzelausführungen steht

1) siehe Teil I pag. 339 f. (Beweis des binomischen Satzes).

er doch den prinzipiellen Fragen über die Grundlagen der Geometrie keineswegs gleichgültig gegenüber; da nimmt er vielmehr im Gegensatz zu seinen Vorgängern in Frankreich nicht nur die Euklidische Tradition mit vollem Interesse auf, sondern fördert sie auch durch wesentliche neue Ideeen.

Besonders ist es die Theorie der Parallelen, auf die er seine Aufmerksamkeit richtet, und hierüber will ich noch gern einiges Nähere sagen. Übrigens muß man sich dabei an die ersten Auflagen halten, da die späteren Bearbeiter gerade in dieser Richtung vieles stark abgeändert haben.

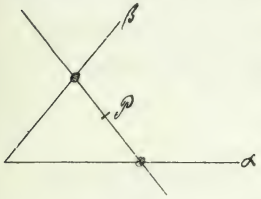
Ich gehe von folgender Bemerkung aus: Wir hatten die verschiedenen nichteuklidischen und die euklidische Geometrie früher durch die Existenz von keiner, 2 oder 1 Parallelen unterschieden; statt dessen kann man jedoch auch die Winkelsumme eines beliebigen geradlinigen Dreiecks heranziehen und erhält folgende, wie sich zeigen läßt, genau aequivalente Unterscheidung: In der euklidischen Geometrie ist sie stets π, in der nichteuklidischen erster Art (der hyperbolischen) ist sie stets kleiner als π, und in der zweiten Art (der elliptischen) endlich stets größer als π. Von dieser Fassung ausgehend, will Legendre beweisen, daß die letzten beiden Möglichkeiten ausgeschlossen sind. Da das nichts heißt, als das euklei-

direkte Parallelenaxiom beweisen, kann er das nur dadurch erreichen, daß er der Anschauung gewisse einfache, das Parallelenaxiom implizierende Obersätze entnimmt, und seine Kunst ist nur, diese so plausibel zu wählen, daß der Leser und gewiß auch der Autor selbst nicht merkt, daß es sich hier tatsächlich um neue einschränkende Voraussetzungen handelt.

Was nun zunächst die Unmöglichkeit der elliptischen Geometrie, also der Winkelsumme $> \pi$ anlangt, so liegt dem sehr beachtenswerten Legendre'schen Beweise die stillschweigende Annahme unendlicher Länge der Geraden zu Grunde. Das ist gewiß eine äußerst plausible Annahme, an deren Richtigkeit weder Legendre noch einer seiner Leser gezweifelt hat, und die auch weiterhin alle Geometer vor Riemann als selbstverständlich angesehen haben. Und doch zeigt die elliptische Geometrie, daß mit allen andern Axiomen auch die Annahme einer endlichen Länge der Geraden verträglich ist, wenn man sie nur unbegrenzt, also in sich zurücklaufend annimmt; man muß sich also bewußt sein, daß man mit der unendlichen Länge der Geraden eine neue unabhängige Tatsache der Anschauung heranzieht.

Um nun ebenso die hyperbolische Geometrie auszuschließen, benutzt Legendre gleichfalls – ohne sie beson-

ders hervorzuheben – eine einfache Ausschauungstatsache, an der kein noch so durch geometrische Studien noch nicht sozusagen verbildeter Verstand jemals zweifeln wird: Ist P irgend ein Punkt innerhalb des Winkels zweier Halbstrahlen α, β so soll man durch P stets eine Gerade ziehen können, die sowohl α als auch β trifft. Indem es dies benutzt gelingt ihm einwandsfrei der Beweis, daß die Winkelsumme im Dreieck auch niemals kleiner als π sein kann, womit dann schließlich allein die Euklidische Geometrie übrig bleibt.

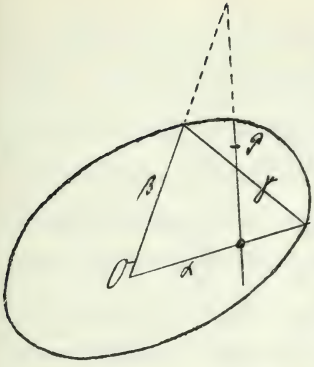


Ich muß nun deutlich machen, inwiefern diese so plausible Tatsache in der Nichteuklidischen Geometrie erster Art nicht zutrifft; dann erst können wir es verstehen, daß es Legendre durch ihre Benutzung gelingt, diese Geometrie auszuschließen. Ich habe früher (S. 371 ff) kurz angedeutet, wie man zur nichteuklidischen Geometrie durch Einführung einer allgemeinen Fläche zweiter Ordnung statt der speziell in den imaginären Kugelkreis ausgearteten als Grundlage der Maßbestimmung gelangt, und ich habe die Fundamentalformeln angegeben, ohne jedoch auf das geometrische Detail einzugehen zu können; das muß ich nun hier zu dem bezeichneten Zwecke zum Teil nachholen, wobei es hinreicht,

nur von der Ebene zu sprechen. Da haben wir (S. 369) als Fundamentalkegelschnitt der hyperbolischen nichteuklidischen Maßbestimmung die Kurve mit der Geradengleichung $\Phi \equiv \alpha^2 + \beta^2 - \varepsilon \delta^2 = 0$ für $\varepsilon > 0$ zu verwenden, also einen reellen Kegelschnitt, und die Entfernungsformel (S. 372)

$$x = k \cdot \arccos \frac{\varepsilon(\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2) - \zeta_1 \zeta_2}{\sqrt{\varepsilon(\xi_1^2 + \eta_1^2) - \zeta_1^2}\sqrt{\varepsilon(\xi_2^2 + \eta_2^2) - \zeta_2^2}}$$

gibt reelle Werte nur, wenn k reell, nicht imaginär ist und beide Punkte 1, 2 im Inneren des reellen Kegelschnittes liegen, dabei ist unter dem Inneren der Inbegriff derjenigen Punkte der Ebene verstanden, durch welche keine reellen Tangenten an den Kegelschnitt laufen. Daher besteht das Operationsgebiet der reellen hyperbolischen Geometrie lediglich aus den Punkten dieses Inneren und den Geraden, soweit sie durch das Innere gehen; die Punkte des Kegelschnittes selbst stellen das Unendlichweite dar, denn jene Formel ergibt für die Entfernung jedes Punktes O von einem Kegelschnittpunkte den Wert ∞. Auf jeder Geraden der reellen hyperbolischen Geometrie gibt es also in diesem Sinne 2 unendlichferne Punkte, ihre beiden Schnittpunkte mit dem Kegelschnitt $\Phi = 0$, auf jedem Halbstrahle a aber nur einen. Als Parallelen zu einem Halbstrahl a wird man nun alle Geraden, durch seinen unendlichfernen Punkt d. h. alle durch das Innere des Ke-



gelschnittes gehende Strahlen durch den Schnitt von α mit dem Kegelschnitt zu bezeichnen haben; betrachten wir die ganze Gerade α, so gibt es noch ein zweites Parallelenbüschel durch den zweiten unendlichfernen Punkt der Geraden. Haben wir 2 Strahlen α, β durch O, so gibt es eine Gerade γ, die sowohl zu α als zu β parallel ist, nämlich die Verbindung ihrer Schnitte mit dem Kegelschnitte $\Phi = 0$ (in der Figur als Ellipse gezeichnet); das kann natürlich in der Euklidischen Geometrie nicht vorkommen. Wählen wir nun den Punkt P zwischen α und β außerhalb des von γ mit α und β abgegrenzten Dreiecks, (aber natürlich innerhalb unserer Ellipse), so trifft für ihn die Legendre'sche Annahme nicht mehr zu; denn jede Gerade durch P wird nur einen der Strahlen α, β innerhalb des Kegelschnittes, den andern aber außerhalb, d. h. im Sinne unserer Geometrie garnicht treffen. Das gerade wollte ich aber hier zeigen.

Verlassen wir nach diesem Exkurse Legendre und sehen zu, wie die Entwicklung des geometrischen Unterrichts in Frankreich nach ihm weitergeht. Verkehrterweise hat sich die Organisation des Schulwesens in

Frankreich im Laufe des 19. Jahrhunderts äußerst wenig geändert, wie denn überhaupt auf allen kulturellen Gebieten die unter Napoleon I. geschaffenen Einrichtungen lange Zeit hindurch allen Wechsel des politischen Regimes überdauert haben. So herrscht im geometrischen Unterricht immer weiter fast unbeschränkt Legendre, nur daß in den fortgesetzten Neuauflagen [1] sich eine gewisse Filtrierung des Inhaltes vollzieht in dem Sinne einer Einschränkung der Beziehungen zu den Anwendungen, die sich bei Legendre noch finden. Wenn nämlich auch Legendre selbst der Kunst des geometrischen Messens nicht mehr die hervorragende Stelle einräumt, wie Clairaut oder gar Petrus Ramus, so hat er doch nicht die Geringschätzung dafür, wie sie später einriß, und auch der Sinn für mathematische Exaktheit, für numerisches Rechnen, ist noch recht rege bei ihm. Aber alles hierauf Bezügliche wird in den späteren Auflagen mehr und mehr weggelassen, insbesondere fällt das Kapitel über Trigonometrie fort, in dem Legendre vor allem enge Beziehungen zu jenen Anwendungen nimmt. Als charakteristisches Beispiel will ich den sog. Legendreschen Satz der sphärischen Trigonometrie anführen. Hat

1) Ich habe hier zur Hand die 33. Aufl., bearbeitet von A. Blanchet (Paris 1893)

man ein sphärisches Dreieck mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ auf der Kugeloberfläche, so ist der sog. sphärische Exzeß $\alpha + \beta + \gamma - \pi = \varepsilon$ bekanntlich stets positiv. Sind nun die Seiten im Verhältnis zum Kugelradius nicht zu groß, auf der Erdoberfläche etwa nicht größer als 100 Km, so kann man das sphärische Dreieck mit einer für alle praktischen Zwecke hinreichenden Genauigkeit ersetzen durch ein ebenes Dreieck mit den Winkeln $\alpha - \frac{\varepsilon}{3}$, $\beta - \frac{\varepsilon}{3}$, $\gamma - \frac{\varepsilon}{3}$. Diesen schönen Satz, der tatsächlich in der geodätischen Praxis viel gebraucht wird, beweist Legendre sehr einfach, indem er in den Formeln der sphärischen Trigonometrie nur die ersten Glieder der Reihen für die trigonometrischen Formeln benutzt. In den späteren Auflagen des Legendre'schen Buches würden Sie diesen Satz aber vergebens suchen.

Neben den fortgesetzten Neuauflagen von Legendre läuft einzwischen noch eine andere Tendenz her, die durch den umfangreichen „Traité de géométrie" von Rouché und de Comberousse [1] charakterisiert ist. In Frankreich wird der dem Hochschulstudium vorangehende mathematische Unterricht sehr viel weiter getrieben, als bei uns; den Uebergang zur Hochschule ver-

1) P. 1. 2. – 6. éd. Paris 1891.

mittelt der zweijährige Kurs der classes de Mathématiques spéciales, in denen es nicht weniger als 16 Wochenstunden Mathematik gibt und wo alle, die sich später der Mathematik bedienen müssen, eine weitgehende Ausbildung erhalten. Durch diesen Betrieb entstand das Bedürfnis, den Lehrbüchern der elementaren Geometrie eine Menge neuen Stoffes hinzuzufügen, und das ist in typischer Weise in dem Rouché - Comberousse geschehen, der ein äußerst verbreitetes Lehrbuch war; er enthält in zahlreichen Noten Exkurse über nichteuklidische Geometrie, Dreiecksgeometrie, Tetraedergeometrie, die Lehre von den wichtigeren Kurven und Flächen und viele andere Gebiete.

Ich komme nun auf die neue Reformbewegung im mathematischen Unterricht zu sprechen, die in Frankreich um 1900 einsetzt, und die unseren deutschen Reformbestrebungen ganz analog ist. Wir können auch diese Bewegung wieder mit Verschiebungen im gesamten Kulturbilde der Zeitepoche in Zusammenhang bringen. Durch den ungeheuren Aufschwung von Handel und Verkehr, Technik und Industrie wird in immer weiteren Volksschichten das dringende Bedürfnis nach Teilnahme an allen kulturellen Errungenschaften, nach Bildung auf allen Gebieten, nicht zum mindesten auch auf

mathematischem, erweckt; freilich sind nicht theoretische Interessen dabei leitend, sondern das Bestreben nützliche, in der Praxis unmittelbar anwendbare Kenntnisse zu erhalten. Man darf den Führern dieser Bewegung aber keineswegs flache Utilitätsgründe vorwerfen; denn es ist ein hoher Ziel - die Hebung der allgemeinen beruflichen Tüchtigkeit - das ihnen vor Augen steht.

Charakteristisch für die französischen Verhältnisse ist, daß diese Reform mit Beratungen in der Pariser Deputiertenkammer beginnt; eine dort eingesetzte Kommission, die sich mit einer großen Zahl öffentlicher Körperschaften in Beziehung setzte, erstattete einen ausführlichen Bericht über die Reform des Mittelschulunterrichts überhaupt, wobei der mathematische Unterricht nur ein wichtiges Glied einer langen Kette ist. Die Hauptgesichtspunkte für dessen Umbildung sind Vereinfachung und höhere Anschaulichkeit des Unterrichts einerseits, andererseits die Heranziehung gewisser Dinge in das Schulprogramm, die man von altersher der höheren Mathematik zugerechnet hat, die aber sowohl leicht zugänglich als auch von größter Bedeutung für das moderne Kulturleben, insbesondere für Naturwissenschaft und Technik sind: ich meine den Funktionsbegriff, die graphische Darstellung, die Anfänge der Zu-

finiterinnabrechnung. Damit wird insbesondere eine viel engere Verbindung von Arithmetik und Geometrie erstrebt, als man sie früher jemals ins Auge faßte, es ist der Gipfel dieser Fusion im weitesten Sinne. Diese Reform ist niedergelegt im Plan d'études von 1902 [1] und sogleich allgemein eingeführt worden. Zu diesem einheitlichen Vorgehen zeigt sich so recht die Wirkung der früher erwähnten weitgehenden Zentralisation gerade auch der Schulverwaltung in Frankreich, vermöge deren es zu einer solchen weitgehenden Reform nur einer Verordnung der obersten Behörde bedarf. Diese ganze Entwickelung ist eingehend in dem von Herrn Schimmack herausgegebenen Bande meiner „Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen" [2] behandelt, auf den ich Sie hier gern verweise; Sie finden da überhaupt zahlreiche nähere Angaben über die Organisation und Entwickelung des mathematischen Unterrichts überhaupt, die das hier speziell für die Geometrie Vorzutragende ergänzen und vervollständigen. Was die französischen neuen Lehrpläne angeht, so will ich hier nur das noch besonders beto-

1) Plan d'études et programmes d'enseignement dans les lycées et colleges de garçons. Paris 1903.

2) F. I. Vom der Organisation des mathematischen Unterrichts. Leipzig 1907.

nen, daß die alte Elementargeometrie im Euklidischen Sinne in diesen Lehrplänen gegenüber den modernen neuen Ideen recht stark zurücktritt. Sie werden das bestätigt finden, wenn Sie sich eines der wichtigsten der an die neuen Lehrpläne anschließenden geometrischen Lehrbücher, die Géométrie von Borel [1] ansehen; es ist ein sehr interessantes Buch, in dem der Stoff einfach und sinnfällig angeordnet ist, und wo übrigens die praktischen Interessen äußerst stark hervortreten.

Demgegenüber ist es bemerkenswert, daß man jetzt gleichzeitig im französischen Unterricht doch auch wieder einem vollständig logisch durchgearbeiteten Lehrgebäude der Elementargeometrie, wie es etwa Euklid vorschwebte, Interesse zuwendet. Besonders ein sehr bedeutendes Buch habe ich Ihnen dazu zu nennen, die „Nouveaux éléments de géométrie" von Ch. Méray in Dijon, die zwar schon 1874 zum ersten Mal erschienen sind, aber doch erst in den letzten Jahren die Aufmerksamkeit weiterer Kreise auf sich lenkten. [2] Méray benutzt in seinen Beweisen keine Tatsache der Anschauung, die er nicht zuvor in einem Axiom formuliert hat und entwickelt so ein vollständiges Axiomensystem der Geometrie; dabei kommt er aber

1) Paris 1905. Deutsche Übertragung (als „Elemente der Mathematik" Bd. II) von P. Stäckel in Vorbereitung (bei Teubner, Leipzig).
2) Nouv. éd. Dijon 1903. 3 éd. 1906.

den Anforderungen des wirklichen Unterrichts insofern viel mehr als die strengen Euklidanhänger entgegen, als er die Anzahl der Axiome nicht so streng auf ein Minimum unabhängiger Sätze zu reduzieren strebt und sie auch im wesentlichen immer erst dann formuliert, wenn er sie wirklich braucht. Besonders charakteristisch für Béray aber ist einmal, daß er die Fusion von Planimetrie und Stereometrie so vollständig durchführt, als irgend möglich, und dann, daß er im Gegensatz zu Euklid den Begriff der Bewegungsgruppe durchaus an die Spitze stellt und seinen ganzen Aufbau der Geometrie konsequent auf ihm stützt. So entsteht ein ganz ähnlicher Aufbau, wie wir ihn neulich skizzierten: Translationen und Rotationen stehen von Anfang an einander gegenüber; die ersteren liefern den Begriff der Parallelität, die andern, da es sich immer bald um den Raum handelt, den Begriff des Senkrechtstehens in der Lage der Rotationsachse zu den Ebenen, in denen die Bahnkurven (Kreise) jedes Punktes liegen. Sie mögen die sehr interessante genaue Durchführung dieses Aufbaues bei Béray selbst nachlesen. Ich erwähne hier nur noch, daß er stets besonderen Wert auf die exakte Durchführung aller in der Geometrie etwa notwendigen Grenzprozesse legt und dabei den modernen Zahlbegriff in seiner exaktesten Form -

lierung gelegentlich wohl benutzt, wenn er auch lange nicht so weit in der Fusion mit der Arithmetik, der analytischen Geometrie geht, wie wir das hier sahen.

Man kann übrigens in den modernen französischen Schulbüchern die Einwirkung des Méray'schen Standpunktes deutlich wahrnehmen. So spielt in dem genannten Buche Borels der Bewegungsbegriff eine größere Rolle und noch vielmehr ist das in dem neuen „Éléments de géométrie" von C. Bourlet [1] der Fall, von dem viele sehr verbreitete Lehrbücher herrühren; hier ist überall ganz ausdrücklich von der Bewegungsgruppe und den geometrischen Begriffen als ihren Invarianten die Rede.

Wir verlassen damit Frankreich und gehen zu

III. dem Unterricht in Italien

über. Da haben wir ebenfalls eine äußerst charakteristische Entwicklung, die aber durchaus andere Grundzüge aufweist als in England und Frankreich, und in ihrer typischen Ausbildung höchstens mit Méray in Parallele gesetzt werden kann. Ich will mich hier nur mit dem modernen Italien von etwa 1860 an beschäftigen. Den größten Einfluß auf die einheitliche Neugestaltung des mathematischen Unterrichts in diesem neugebildeten Einheitsstaate hatte L. Cremona, derselbe, der Ihnen allen

[1] Paris 1908.

wegen seiner wissenschaftlichen Bedeutung in der Entwicklung der modernen Geometrie bekannt ist; ist er doch geradezu der Begründer der selbständigen algebraisch-geometrischen Forschung in Italien, die so hervorragende Resultate gezeitigt hat. Dieser seiner wissenschaftlichen Tätigkeit gemäß hat Cremona eine nachhaltige Wirkung auf den Hochschulunterricht ausgeübt, indem er die projektive Geometrie in Verbindung mit darstellender Geometrie und graphischer Statik in den Vordergrund brachte. Die Ingenieure sprechen heute überall in der Welt von Cremonaschen Kräfteplan, und wenn der Name auch historisch unrichtig ist, zeigt er doch deutlich den großen Einfluß Cremonas.

Derselbe Cremona hat nun merkwürdigerweise auf den Unterricht an den Mittelschulen in ganz anderem Sinne eingewirkt. In einem berühmten Gutachten von 1867 empfiehlt er den Euklid, wenn nicht als verbindlich, so doch in seiner Anordnung und Begrenzung des Stoffes sowie vor allem in seinem Ideal eines streng logisch geschlossenen Aufbaues der Geometrie als vorbildlich für den gesamten geometrischen Schulunterricht einzuführen. Hier betont er also besonders die logische Seite, während in seiner eigenen unmittelbaren Lehrtätigkeit und auch in seiner wissenschaftlichen Arbeit vor allem die an-

schaulichen Momente in den Vordergrund kommen; [1] es ist nicht recht zu verstehen, was eigentlich das Bindeglied zwischen diesen beiden anscheinend so entgegengesetzten Anschauungen bei Cremona war.

Jedenfalls aber fiel diese Anregung Cremonas von 1867 auf äußerst fruchtbaren Boden und es bemächtigte sich der italienischen Mathematiker ein wahrer Wetteifer, den Euklid durch Lehrbücher zu ersetzen, die seinen Stoff und seine ganze Tendenz durchaus festhalten und sie nur in einer den heutigen verschärften Anforderungen entsprechender Weise realisieren. Charakteristisch ist, daß sich ganz wie vor es in Frankreich sahen, auch eine Reihe der wissenschaftlich hochstehenden Mathematiker an dieser Arbeit beteiligen, und daß demgemäß eine Anzahl wissenschaftlich sehr bedeutender Werke dabei entstehen, deren pädagogischen Wert man freilich nicht ebenso hoch einzuschätzen braucht. Ein sehr interessanter Referat über die wichtigsten Erscheinungen dieser Bewegung hat neuerdings W. Lietzmann [2] gegeben; ich will im folgenden, zum Teil im Anschluß daran, nur wenige besonders charakteristische Momente

1) Vgl. dafür z. B. Cremonas „Elemente der projektivischen Geometrie," (1873) Deutsch von Trautvetter. Stuttgart 1882.

2) „Die Grundlagen der Geometrie im Unterricht (mit besonderer Berücksichtigung Italiens)." Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht. 39. (1908) pag. 177.

hervorheben.

Ich beginne damit, die Euklidübersetzung zu nennen, die E. Betti und F. Brioschi im Jahre 1867 veranstalteten [1] und auf die die Verbreitung der Euklidkenntnis in Italien zurückgeht; sie enthält, ganz wie die Schuleuklidausgaben der Engländer nur die Bücher 1 bis 6, 11 und 12, aber im Gegensatz zur englischen Tradition ist die ausgesprochene Meinung die, den Stoff nicht etwa in dieser alten Form den Schülern darzubieten, sondern sie soll nur die Basis zur selbständigen wissenschaftlichen Verarbeitung liefern. Eine größere Reihe älterer Lehrbücher schließt sich dabei noch möglichst eng an das Euklidsche Schema der Definitionen etc. an, wobei jedoch auch alle die zahlreichen Anschauungstatsachen, von denen Euklid stillschweigend Gebrauch macht, ausdrücklich praezis formuliert werden. Um über die Lücken im ersten Buch hinwegzukommen, rechnet man allgemeiner Ansicht zufolge auch den Begriff der starren Bewegung zu diesen stillschweigend von Euklid benutzten Dingen und stellt ihn daher ausdrücklich mit an die Spitze des Systems, indem man eine Reihe „Axiome der Bewegung" formuliert. Ganz wie bei Hérary wird dabei übrigens aus paedagogischen Gründen kein Wert auf Unabhängigkeit der

1) Gli Elementi di Euclide. 36. Ristampa. Firenze 1901.

einzelnen aufgestellten Axiome gelegt. Ein typisches Buch dieser Richtung sind die sehr verbreiteten „Elementi di geometria" von A. Sannia und F. d'Ovidio [1], die 1869 zum ersten Male erschienen, und in denen sie alle vorgenannten Punkte bestätigt finden werden. Der Stoff ist genau so begrenzt wie bei Euklid, nur daß er in wesentlich geglätteter Gestalt dargeboten wird. So wird der Zahlbegriff der reinen Arithmetik noch durchaus vermieden, aber aus den Euklidischen Exhaustionsbeweisen doch ein für alle Male die zu Grunde liegende Idee des Grenzbegriffes deutlicher herauspräpariert, als es Euklid tut. Weiterhin ist insbesondere auch Planimetrie und Stereometrie äußerlich getrennt, doch wird offenbar damit gerechnet, daß das Buch in Schulen mit „fusionistischem" Lehrgange gebraucht wird, wie ja diese Fusionsbestrebungen zwischen Planimetrie und Stereometrie gerade in Italien besonders verbreitet sind. Als ein Lehrbuch, das sie am meisten propagiert hat, will ich die „Elementi di Geometria" von R. de Paolis [2] wenigstens noch nennen.

Wesentlich mehr als diese und die verwandten Werke entfernt sich eine andere Gruppe von Lehrbüchern von der Euklidischen Darstellung, indem sie ein

1) Vol. I. II. 11. Ed. Napoli 1902.
2) Torino 1884.

noch viel höheres Maß von Strenge und Präzision in der Fassung der Grundlagen zu erreichen sucht. Sie halten die zahlreichen geometrischen Grundbegriffe der Euklid und jener Lehrbücher für nicht hinreichend streng definiert und wollen daher mit einem einzigen Grundbegriff, dem des Punktes auskommen, aus dem alle anderen in der Geometrie notwendigen Gebilde rein logisch aufgebaut werden sollen; insbesondere soll auch jeder Gebrauch des Begriffes der starren Bewegung bei der Grundlegung der Geometrie durchaus vermieden werden. Den Höhepunkt dieser Entwicklung stellen wohl die verschiedenen Lehrbücher G. Veroneses dar, die das gesamte Gebiet der Geometrie umfassen. Indessen kommen hier für uns nicht seine „Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten geradliniger Einheiten in elementarer Form entwickelt" [1] in Betracht, die durchaus kein Schulbuch sind, sondern in abstraktester Form das rein wissenschaftliche Problem einer allgemeinen mehrdimensionalen und „nichtarchimedischen" Geometrie behandeln; uns interessieren vielmehr seine Schulbücher „Nozioni elementari di geometria intuitiva" [2] und „Elementi di geometria" [3]. Das

1) Dtsch. v. A. Schepp. Leipzig 1894.
2) 2 ed. Verona 1902.
3) In verschiedenen Ausgaben; z. B. „ad uso dei ginnasi e licei. Con collaborazione di P. Gazzaniga. P. I. II. ed. III. Verona 1904."

erstere ist eine induktive Einführung, die auf der Unterstufe dem Schüler die verschiedenen geometrischen Formen anschaulich nahe bringen soll – entsprechend etwa unserem propädeutischen Vorkurs. Der eigentliche systematische geometrische Unterricht beginnt nämlich auf allen italienischen Lehrplänen erst sehr spät, in Klassen, die etwa unseren Sekunden entsprechen; man darf also nicht etwa glauben, daß alle diese exakten Lehrbücher sich an Knaben vom Alter unserer Quartaner wenden! Die Elementi Veroneses geben die theoretischen Entwicklungen, wobei in äußerst vollständiger Weise alle Postulate der Geometrie aufgestellt werden – auch wenn sie noch so selbstverständlich erscheinen; so heißt es z. B. ausdrücklich als erstes Postulat „Es gibt verschiedene Punkte" – wir betrachten also nicht etwa eine Geometrie, in der nur 1 Punkt existiert! Dabei wird übrigens immer noch wenigstens kurz der empirischen Beobachtung gedacht, die als heuristisches Prinzip für die Aufstellung der Axiome leitend ist. Zum einzelnen verwendet nun Veronese die geradlinige Strecke als fundamentales geometrisches Gebilde, das er als ein gewissen Forderungen genügendes System von Punkten definiert. Auf die Kongruenz solcher Strecken, die als Grundbegriff auftritt, wird nun in sehr origineller Weise alles andere zurückgeführt; so heißen 2 Dreiecke kongruent, wenn

alle Seiten kongruent sind, womit auch die Kongruenz der Winkel definiert ist (Also Voraustellung des 3. Kongruenzsatzes!), und sogar die Parallelenlehre wird so in Angriff genommen: Parallel heißen 2 Gerade, die in Bezug auf einen Punkt zentrosymmetrisch liegen, d. h. auf allen Geraden durch ihn paarweis gleiche Strecken ausschneiden. Übrigens hält sich auch Veronese durchaus innerhalb der Grenzen des Euklidischen Lehrstoffes, speziell vermeidet er natürlich jede Anlehnung an die Arithmetik. Diesem Veroneseschen Buche inhaltlich verwandt sind die „Elementi di geometria" von F. Enriques und U. Amaldi, [1] die nur in bedeutend höherem Maße neben der strengen Systematik auch die paedagogischen oder psychologischen Momente betonen.

Diese abstrakte Richtung Veroneses hat nun noch eine Steigerung erfahren in der sog. Peanoschule. G. Peano in Turin verbrieft die Tendenz, die rein logische von Anschauungselementen freie Bearbeitung der Mathematik noch viel schärfer durchzuführen, als es in den bisher berührten axiomatischen Untersuchungen geschieht, und er hat zu diesem Ende eine besondere Formelsprache ersonnen, die an die Stelle der gewöhnlichen Sprache treten soll; denn er meint, daß man sonst infolge der zahl-

1) 2 ed. Bologna 1905.

reichen Assoziationen, die sich unwillkürlich an die umgeläufigen Worte knüpfen, das Hineinspielen nicht logischer Momente unmöglich vermeiden könne. So wird das Ideal schließlich ein Operieren mit an sich bedeutungslosen Symbolen nach „willkürlichen" Regeln, die auch ihrerseits nichts zu bedeuten haben. Peano hat eine große Schule begründet, die jetzt in Italien weit verbreitet ist und viel Einfluß hat. Mit seinen Schülern gemeinsam veröffentlicht er ein „Formulaire", in dem die gesamte Mathematik ihrem rein logischen Inhalt nach in seiner Formelsprache dargestellt werden soll.

Fragen wir uns, ob eine solche extreme Betonung der rein logischen Momente für die Wissenschaft förderlich sein kann. Ich wende da gern das Gleichnis an, daß viele Leute zwar vom Tal auf einen Berg steigend die reinere dünnere Luft angenehm empfinden werden, daß aber bei immer weiterer Verdünnung der Luft für jeden doch die Grenze kommt, jenseits deren die Existenzmöglichkeit aufhört. So glaube ich, daß die Begeisterung der Logiker für die Elimination jeder Anschauung (sofern sie überhaupt möglich ist, denn auch die Peanoschen Symbole bringen als solche noch einen Rest anschaulicher Elemente in sein System!) etwas voreilig ist: mag manchem vielleicht auch zu-

nächst in dieser reineren Logik sehr wohl zu Hause sein, so wird es doch auch hier ein Optimum in der Verteilung von Logik und Anschauung geben, das zu Gunsten der ersteren ohne Schaden nicht überschritten werden kann!

Freilich, was die reine Forschung angeht, so wird man natürlich jeden neuen Ansatz gut heißen und die Fortschritte und Anregungen abwarten, die er bringt. Aber hier muß man auch vom Standpunkte der Pädagogik aus ein Urteil abgeben, da jene abstrakten Tendenzen vielfach auch auf den Schulunterricht Einfluß gewonnen zu haben scheinen, und dies Urteil wird mehr negativ lauten müssen; man darf wohl vermuten, daß bei einem Schulunterricht im Sinne jener Richtung viele Schüler gar nichts lernen, und die Wenigen, die überhaupt folgen können; jedenfalls nicht das erhalten, was sie später gebrauchen können.

In der Tat scheint in Italien auch bereits eine Reaktion gegen diese allzu abstrakte Gestaltung des Unterrichts entstanden zu sein – auch an den Hochschulen, denn merkwürdiger Weise haben die reinen Logiker gerade an den technischen Hochschulen vielfach das Uebergewicht erlangt. Man klagt da jetzt über eine schlechte mathematische Ausbildung des Durchschnitts der Studenten, die den ab-

praktischen Auseinandersetzungen nicht folgen können; schon vor Jahren wurde mir gelegentlich als amüsantes Beispiel mangelnder Anpassung an die tatsächlichen Bedürfnisse erzählt, daß in Vorlesungen für Ingenieure der Taylorsche Satz zuerst für beliebig viele Variable bewiesen und erst hinterher auf eine Variable spezialisiert wurde!

Aber auch für den Mittelschulunterricht machen sich in neuerer Zeit Reformbestrebungen geltend, die ganz im Sinne unserer deutschen und der französischen Bewegung die vorwiegende Berücksichtigung der abstrakten Logik und den engen stofflichen Anschluß an Euklid aufgeben, und den Unterricht durch anschauliche Momente, durch Heranziehung der wichtigsten Allgemeinbegriffe der modernen Wissenschaft (Funktionsbegriff), schließlich auch durch Bezugnahme auf die Anwendungen beleben wollen. Der Führer dieser Bewegung ist Gino Loria, der 1904 vor dem 3. internationalen Mathematikerkongreß in Heidelberg über den mathematischen Unterricht in Italien berichtet [1] und seither auch in einem interessanten auch ins Deutsche übertragenen Vortrage [2] vor der italienischen Oberlehrervereinigung „Mathesis"

1) Verhandlungen des ... Leipzig 1905. pag. 594.
2) „Vergangene und künftige Lehrpläne". Deutsch v. H. Wieleitner. Leipzig 1906.

über seine Reformvorschläge gesprochen hat. Diese Vereinigung ist ein Zeugnis dafür, daß man auch in den Lehrerkreisen Italiens den modernen Ideen jetzt reges Interesse zuwendet, und wenn auch die neuen Lehrpläne von 1905 [1] nur erst geringe Spuren davon zeigen, so darf man doch vielleicht annehmen, daß man sich auch an den italienischen Schulen jetzt allmählich von den Banden der extremen Logik befreien und eine moderne Gestaltung des Unterrichts einführen wird.

Wir werden uns nun endlich an letzter Stelle

IV. dem Unterricht in Deutschland

zu, wobei wir der Idee nach auch alle deutschsprechenden Länder, wie die deutsche Schweiz und Oesterreich mit berücksichtigen wollen. Wir haben in dem Entwickelungsgang des deutschen geometrischen Unterrichts wieder einen ganz anderen Typus, als in den anderen Ländern; vor allem fehlt die Einheitlichkeit der Entwicklung, wie sie anderwärts durch die strenge staatliche Organisation oder das Eingreifen einer starken Persönlichkeit erzielt war. Hier in Deutschland hat sich vielmehr der Unterricht in jedem Einzelstaate für sich in eigenen Bahnen entwickelt und noch darüber hinaus blieb der einzelnen Anstalt, dem einzel-

1) Istruzioni e programmi vigenti nei ginnasi e licei. Torino 1905.

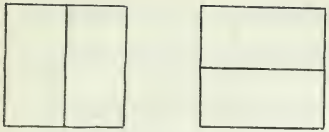
nen Lehrer stets ein relativ großer Spielraum für selbständige Betätigung. So sind denn eine große Menge verschiedenartiger Anregungen aus den verschiedensten Quellen nebeneinander zur Geltung gekommen, und sie konnten sich meist entwickeln, noch ehe ihnen in offiziellen Lehrplänen nachgegeben war. Ich kann hier natürlich nur wenige Gesichtspunkte herausgreifen, die für die Entwicklung des geometrischen Unterrichts in den letzten Jahrzehnten – sagen wir von etwa 1870 an – besonders bedeutsam geworden sind, und verweise im übrigen auch hier zur Ergänzung auf die ausführliche Darstellung der allgemeinen Entwicklungslinien in Klein-Schimmack.[1]

Eine besonders wichtige Tendenz, die sich seit den siebziger Jahren geltend macht – in Zusammenhang mit dem gesteigerten Bildungsbedürfnis weiter Volksschichten, wie es mit dem nationalen Aufschwung in jener Zeit entstand – geht auf Bewegungen im Volksschulunterricht zurück; es ist die Auffassung, daß im Elementarunterricht notwendig die unmittelbare Anschauung voran stehen müsse, daß man hier den Unterricht immer an sichtbare dem Schüler wohlbekannte Dinge anknüpfen müsse. Diese Anregungen stammen bekanntlich von dem berühmten Schweizer

1) [Zitiert S. 474] Siehe insbesondere passim 67 ff.

H. Pestalozzi, in dem man überhaupt den Begründer des Elementarunterrichtes im heutigen Sinne sehen muss; seine Wirkungszeit fällt – in runder Zahl – um das Jahr 1800. Gewiss hat es für jeden Mathematiker Interesse, Pestalozzis Originalpublikationen, die für die Mathematik in Betracht kommen, kennen zu lernen; es sind dies „das A B C der Anschauung oder die Anschauungslehre der Maßverhältnisse" 1) und „die Anschauungslehre der Zahlenverhältnisse" 2). Diese Bücher sollen zeigen, wie man die allereinfachsten Tatsachen der Raum- und Zahlanschauung dem gänzlich unvorgebildeten Schüler durchaus zu eigen machen kann. Freilich täuscht man sich sehr, wenn man in ihnen irgend etwas besonders Packendes erwartet; sie sind so ziemlich das Langweiligste, was ich je in der Hand gehabt habe, da nämlich lediglich alle möglichen trivialen Verhältnisse mit erschreckender Konsequenz ganz ausführlich dargelegt werden. Um nur ein Beispiel herauszugreifen: Das Kind soll lernen, daß ein Quadrat durch horizontale und vertikale Gerade in gleiche Teile geteilt werden kann; dazu gibt Pestalozzi nicht nur eine Tafel mit sämtlichen 100 Kombinationen von Teilungen durch 0, 1 . . . 9 vertikale und hori-

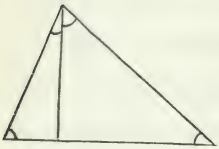
1) In 2 Heften. Zürich und Tübingen 1803.
2) In 3 Heften. Zürich und Tübingen 1803/04.



zontale Linien, sondern bespricht auch im Text die Anzahl, Lage etc. der Teilquadrate und Rechtecke in jedem einzelnen Falle nach immer wieder demselben Schema in der denkbar ausführlichsten Weise. Man muß das wohl so verstehen, daß Pestalozzi auch dem ungeschicktesten Volksschullehrer – er mußte ja damals noch mit ganz unzureichend vorgebildetem Material rechnen – eine reiche Sammlung von Beispielen bieten wollte, von denen er einen beliebigen Teil nach Auswahl wörtlich seinem Unterricht zu Grunde legen konnte.

Ich lege Ihnen zur Ergänzung noch ein Schriftchen des Göttinger Philosophen J. F. Herbart vor, der besonders für die Ausbreitung dieser Ideeen tätig war: „Pestalozzis Idee eines A B C der Anschauung." [1] Hier werden die Pestalozzischen Ansätze in weniger schematischer und darum interessanterer Darstellung fortgeführt. Namentlich sind es alle möglichen Dreiecksgestalten, die Herbart den Kindern deutlich gemacht wissen will. So gibt er in einer Tabelle die Dreieckswinkel sowie die Winkel rechts und links der Höhe von 5° zu 5° an, und in einer anderen Tabelle

1, Göttingen 1802.



die zugehörigen Seitenlängen, mit dem Zweck, diese Tabelle durch Nachmessen prüfen zu lassen. Amüsant ist auch sein Vorschlag, die verschiedenen Dreiecksformen den Kindern dadurch einzuprägen, daß man ihnen schon in der Wiege Tafeln mit den verschiedensten Dreiecksformen vor Augen stellt.

Pestalozzi und Herbart übten eine mächtige Einwirkung auf den Volksschulunterricht aus, die noch heute nachhält; sie werden in den meisten Lehrbüchern der Raumlehre für Volksschulen deutliche Nachwirkungen der Pestalozzischen Ideeen finden können. In sehr charakteristischer Form finden Sie Pestalozzis Anschauungslehre noch in unseren ganz auf ihn bezw. auf F. Fröbel zurückgehenden Kindergärten erhalten, wo die kleinen Kinder im Spiel mit geeigneten Gegenständen die einfachsten Raumformen kennen lernen.

Aber eben auch auf höhere Schulen haben diese pädagogischen Ideeen bald übergegriffen. Besonders charakteristisch ist in dieser Hinsicht der Lehrplan, den Exner und Bonitz um 1850 für Oesterreich aufgestellt haben. Daß gerade hier und zu dieser Zeit die Bewegung einsetzte, kann man wieder aus den politischen Verhältnissen verstehen; in Oesterreich hatte

sich durch die zahlreichen katholischen Ordensschulen, besonders die der Jesuiten, im mathematischen Unterricht im wesentlichen die dogmatische Methode des Mittelalters erhalten, und als die revolutionäre Bewegung von 1848 das Alte wegschwemmte, da konnte man von den Vorhandenen gar nichts mehr zur Anknüpfung benutzen und führte das Neue im reinsten Typ ein. So übernehmen denn die Exner-Bonitzschen Lehrpläne soweit wie irgend möglich die neuen anschauungsmäßigen Methoden auf die höheren Schulen. Die Raumanschauung wird nicht nur auf der Unterstufe als Vorbereitung betrieben, sondern sie wird zum Selbstzweck erhoben; man soll nicht etwa bloß an anschaulichen Dingen das logische Denken üben, sondern um Übung der Anschauung selbst handelt es sich. Auf der Unterstufe (4 Jahre) tritt der logische Betrieb überhaupt gänzlich zurück und nur das anschauliche Erfassen der Figuren wird unter fortgesetztem Zeichnen geübt; auch auf der Oberstufe, wo der so gewonnene Stoff logisch verarbeitet wird, wird das Zeichnen in beträchtlichem Umfange beibehalten. Jeder von Ihnen wird gelegentlich bemerkt haben, wie geschickt die österreichischen Mathematiker zu zeichnen verstehen – eine Folge jener charakteristischen Gestaltung des Lehrplanes.

Diese Tendenzen sind es nun, die am Anfang der siebziger Jahre auch in Preußen und überhaupt in Norddeutschland sich durchzusetzen beginnen. Man muß hier auch des persönlichen Momentes gedenken, daß Bonitz damals im preußischen Kultusministerium als maßgebende Kraft eintrat. Formuliert wurden die Grundsätze dieser Reform für Preußen in den Lehrplänen von 1882; ihr äußeres Kennzeichen ist die Einführung eines geometrischen Vorkursus, der sog. geometrischen Propädeutik auf der Quinta; hier soll der Schüler anschauungsgemäß mit den Dingen vertraut gemacht werden, die später den Inhalt des Lehrgebäudes der Geometrie bilden werden. Vergleichen Sie hierzu außer Klein-Schimmack auch etwa meinen Aufsatz „100 Jahre mathematischer Unterricht in den höheren preußischen Schulen"[1], in dem ich überhaupt den Gang der Entwicklung unseres mathematischen Unterrichts im letzten Jahrhundert festzuhalten gesucht habe.

Das Lehrbuch, in dem die Tendenzen der Reform von 1882 wohl ihre ausgeprägteste Formulierung gefunden haben, ist Holzmüllers „methodisches Lehr-

1) In Lexis, die Reform des höheren Schulwesens in Preußen (Halle 1902), abgedruckt in Jahresber. d. deutsch. Math.-Verein. 13 (1904), resp. 347 und Klein-Riecke, neue Beiträge zur Frage des math. u. phys. Unterr. an höheren Schulen. (Leipzig 1904). resp. 63.

buch der Elementarmathematik". [1] Hier ist schon der Titel charakteristisch: „Methodisch" ist im Gegensatz zu „systematisch" gemeint; nicht ein starres Lehrgebäude wie etwa bei Euklid soll aufgeführt werden, sondern ein naturgemäßer Lehrgang, der danach orientiert ist, wie man den Schüler erfahrungsgemäß am besten fördert. Und dann haben wir hier nicht ein Lehrbuch der Geometrie oder Arithmetik für sich, sondern die gesamte Elementarmathematik wird in wechselnder Reihenfolge ihrer einzelnen Fächer dargestellt, sowie man sie im Unterricht wirklich aufeinander folgen lassen kann, wobei auch deren gegenseitige Beziehungen deutlich hervortreten. Im übrigen gehen die geometrischen Entwicklungen stets vom wirklichen Zeichnen und Konstruieren aus; besonderer Wert wird stets auf die Ausbildung der Raumanschauung, auf das stereometrische Zeichnen gelegt, und es wird auch immer darauf gesehen, daß man eine Konstruktion nicht nur als möglich erkennt, sondern daß man sie auch wirklich sauber und vollständig durchführt. Die geometrischen Lehrsätze fallen dabei häufig sozusagen nebenbei ab; z. B. entstehen die Kongruenzsätze aus der Bemerkung, daß die Konstruktion eines Dreiecks aus

[1] In 3 Teilen. Leipzig (Teubner) 1894–95, sowie zahlreiche Neuauflagen.

3 gegebenen Stücken eindeutig ist. Ich muß ferner hervorheben, daß in Verbindung mit der geschilderten Tendenz auch die Grundsätze der projektiven Geometrie zum Teil in die Darstellung hineingearbeitet sind. Freilich darf ich nicht verschweigen, daß bei Hoelzmüller die logischen Momente zum Teil etwas zu kurz gekommen sind; aber es ist nun einmal eine alte Sache, daß man nach allen Seiten hin gleichzeitig Befriedigendes nicht erreichen kann; betont man vorzugsweise die Logik, so leidet die Anschaulichkeit, und umgekehrt.

Die positiven Resultate der hiermit geschilderten Bestrebungen sind wohl jetzt allgemein in den Unterrichtsbetrieb übergegangen, aber natürlich sind allmählich wieder neue Anregungen hinzugekommen. Da kommt vor allem wie in allen andern Ländern die starke in Deutschland etwa um Jahr 1890 einsetzende Bewegung in Betracht, die die Anwendungen der Mathematik in allen Zweigen der Naturwissenschaft, insbesondere in der Technik, sowie ihre Bedeutung für alle Seiten des menschlichen Lebens mehr betont zu wissen wünscht. Sie bringt gegenüber der auf Anschaulichkeit gerichteten Tendenz etwas wesentlich Neues, denn diese kann man noch mit rein formalen Zwecken verbinden, während es sich jetzt darum handelt, das mathematische Denken wirklich fruchtbar auf den verschiedensten

anderen Gebieten anzuwenden. Hierzu stehen auch die Reformtendenzen in naher Beziehung, die wir im vorigen Winter so oft berührt haben und die ich daher hier wohl nur noch einmal zu erwähnen brauche: Die Heranziehung des Funktionsbegriffes, der graphischen Methoden, der Aufgabe der Infinitesimalrechnung, die ja alle auch in den gewerblichen Unterricht zahlreiche neue Anregungen bringen.

Etwas ausführlicher will ich aber hier dafür über einige neuere weitergehende Tendenzen sprechen, mit denen sich die Mathematiker mehr auseinandersetzen müssen, als das bisher geschehen ist.

a.) Zunächst meine ich da gewisse Ergebnisse der modernen psychologischen Forschung, speziell der experimentellen Psychologie, sowie der modernen Hygiene. Die Pädagogik auf die Psychologie aufzubauen versuchte schon Herbart, aber die Durchführung dieser Aufgabe hat eine ganz andere Grundlage erhalten, seitdem die Psychologie exakte experimentelle Methoden sich geschaffen hat. Denken Sie z. B. daran, wie wichtig die Erforschung des Gedächtnisses für die Pädagogik ist, wie wichtig es z. B. für sie ist, zu wissen, wie sich Tatsachen dem Gedächtnis einprägen und darin haften bleiben, wie das von der Umgebung oder der persönlichen Disposition des Individuums abhängt, tatsächlich beschäftigen sich jetzt die Psychologen an vielen

Orten, gerade auch hier in Göttingen viel mit diesen Fragen. Ähnlich wichtig für die Pädagogik ist die Untersuchung der Ermüdung, ob z. B. körperliche und geistige Ermüdung unabhängig sind oder nicht; früher glaubte man wohl, daß man nach vorangegangener körperlicher Anstrengung zur geistigen Arbeit besonders befähigt sei, während man jetzt, gestützt auf die Erfahrung, allgemein zur entgegengesetzten Ansicht gekommen ist.

Eine besonders wichtige Frage auf diesem Gebiete gerade auch im Hinblicke auf die Mathematik ist die nach den Unterschieden der individuellen Begabung. Es gab ja eine Zeit, wo man fest davon überzeugt war, daß nur ganz wenige Schüler „mathematische Begabung" hätten, – man meinte damit, daß nur sie überhaupt etwas von der Mathematik verstehen könnten und alle übrigen selbst bei größter Anstrengung doch nichts lernen würden; den Grund, daß eine solche Ansicht so allgemeine Verbreitung finden konnte, kann man wohl nur in der mangelhaften Methode des mathematischen Unterrichts suchen, die damals herrschte. Später als im Anschluß an die Lauer-Bonitzschen Lehrpläne man größeren Wert auf pädagogische Kunst zu legen begann, da kam man bald zu der entgegengesetzten Meinung, daß jeder Schüler bei gutem Willen und einiger Anstrengung auch seitens des Lehrers etwas Erkleck-

lichen in der Mathematik lernen können. Ich erhoffe nun von der experimentellen psychologischen Forschung Auskunft darüber, wie es hiermit wirklich steht. Gewiß gibt es auch unter sonst begabten Leuten vollkommene „Amathematiker", denen das mathematische Denken absolut nicht liegt. Daß auch unter künstlerisch hervorragend begabten Naturen solche Amathematiker vorkommen, zeigte mir kürzlich ein sehr interessantes Gespräch mit dem berühmten Berliner Architekten Messel, der Ihnen allen u. a. durch den ebenso zweckmäßigen als künstlerisch wertvollen Wertheim'schen Warenhausbau bekannt ist; als der hörte, daß ich ein Mathematiker sei, sprach er sich in schärfster Weise über das ganze unnütze Zeug aus, mit dem man auf der Schule so geplagt werde, und das jedenfalls für ihn stets ohne jede Bedeutung geblieben sei. Es wäre vielleicht viel klüger, wenn man solche Naturen auf der Schule ohne Mathematik laufen ließe, als daß man sich vergeblich abmüht, ihnen wenigstens einige mathematische Kenntnisse beizubringen; man erreicht dabei doch meistens nichts, als daß man in ihnen einen großen Widerwillen gegen diese Dinge erweckt, die sie nicht begreifen können, und daß man dadurch der Mathematik einflußreiche Feinde verschafft. Freilich darf sich das nur auf die ganz wenigen beziehen, die bei sonst vortrefflicher Veranlagung

einseitig mathematisch unbegabt sind, und es soll damit nicht etwa der Bequemlichkeit und Faulheit oder jener alten Theorie von der „allgemeinen mathematischen Unbegabtheit" das Wort geredet werden.

Weitere wichtige Aufgaben, die der Psychologie auf mathematischem Gebiet harren, beziehen sich auf die zweifellos vorhandenen feineren Artunterschiede der mathematischen Begabung, die sich auch bei den produktiv wissenschaftlich Arbeitenden geltend machen, aber gewiß auch für die pädagogischen Fragen bedeutsam sind. Bemerkt man doch alle Tage, daß der eine Mathematiker mehr abstrakt arithmetisch veranlagt ist, während der andere das Operieren mit geometrisch anschaulichen Gestalten vorzieht. Man hat bereits besonders solche Leute, die auf einem eng begrenzten Gebiet besondere Fähigkeiten ausgebildet haben, große Rechner oder Schachspieler, psychologisch untersucht, und auch da bereits die größten Unterschiede gefunden; man weiß z. B. daß einige Rechner die großen Zahlen, mit denen sie operieren, anschaulich in Ziffern geschrieben vor sich sehen, (visuelle Veranlagung) während andere wieder auditiv arbeiten, indem sie an den Ton der Zahlworte ihre Assoziationen knüpfen. Ich verweise Sie in dieser Hinsicht auf das interessante Buch Binets „Psychologie des grands calculateurs et

joueurs d'échecs.[1]

b) Eine zweite in der Neuzeit vielfach hervortretende Tendenz, die ich hier noch erwähnen will, berührt sich mit dem, was ich gerade über die mathematische Veranlagung hervorragend künstlerisch begabter Personen sagte; ich meine die moderne sog. Kunsterziehung und Neuerungen im modernen Zeichenunterricht. Das Ziel ist hier, möglichst bald zu einer lebhaften intuitiven Auffassung der Dinge im Ganzen, Grossen zu gelangen und nicht mit dem Studium ihrer Einzelheiten zu beginnen. Besonders interessant zeigt sich dies Bestreben, wie es in verwandter Weise auch bei manchen hervorragenden Ingenieuren hervortritt, in der Entwicklung des Zeichenunterrichtes. Früher legte man da vielfach den Hauptnachdruck darauf, dass jeder Schüler bestimmte Konturen nach Vorlagen exakt nachzeichnen lernte - ein Verfahren, mit dem man nur zu oft wenig Interesse und wenig Erfolge erzielte; ich erinnere mich, dass ich in meiner Schulzeit immer wieder dieselbe Arabeske kopieren musste, weil sie mir absolut nicht gelingen wollte, wodurch gewiss meine Fähigkeit zu zeichnen nicht entwickelt wurde. Heut gibt man im Gegenteile dem Kinde von vornherein Pinsel und Farbe in die Hand, und lässt es bald nach eigenem Eindrucke ein-

[1] Paris 1894.

solche alltägliche Gegenstände abmalen, so wie es sie unmittelbar vor Augen oder in Erinnerung hat. Auf genaue Wiedergabe der Einzelheiten kommt es dabei garnicht an, die können höchst unexakt sein, wenn nur der Gesamteindruck getroffen ist. Man sieht heute allerwärts in Ausstellungen von Schulen, was für überraschend gute Resultate mit dieser Methode selbst bei Kindern ohne jede spezifisch künstlerische Begabung erzielt werden. Freilich steht diese Richtung durchaus im Gegensatz zum mathematischen Zeichnen, insofern dieses gerade auf genaue, auch quantitativ richtige Festlegung aller Einzelheiten Wert legen muß. Und natürlich können beide Tendenzen leicht in schärfsten Kampf mit einander geraten, wenn die eine oder andere allzu einseitig gehandhabt wird. Da werden z. B. einmal in der darstellenden Geometrie mit großer Mühe sehr viele einzelne Punkte einer Kurve konstruiert, aber da mangels der nötigen zeichnerischen Fertigkeit diese Punkte vielleicht recht ungenau liegen und der Zeichnende nicht die richtige Vorstellung vom Aussehen der Kurve hat, legt er statt einer ordentlichen Kurve einen unmöglichen Zickzack, der jedenfalls kein Bild der wirklich darzustellenden räumlichen Verhältnisse vermittelt. Ebenso kann andererseits auch das künstlerische Zeichnen zur Karrikatur

werden; die Einzelheiten werden so verschwommen, daß man vielleicht in einiger Entfernung allenfalls etwas zu erkennen glaubt, in der Nähe aber nur einen undefinierbaren Klex sieht. Aber ich meine, vernünftig betrieben könnten sich beide Richtungen doch recht wohl verständigen und einander ergänzen, was im Interesse der Sache recht wünschenswert wäre; es wäre wohl auch für die Mathematik recht wenig zweckmäßig, sich einer neuen rasch aufstrebenden Bewegung hier prinzipiell feindlich gegenüberzustellen. Manches anregende Material in der Richtung einer Verständigung enthält die Schrift von Fr. Schilling „über die Anwendungen der darstellenden Geometrie“[1], wo u. a. auch von den Beziehungen zur Kunst die Rede ist.

Ich erwähne in diesem Zusammenhange gern auch die oft zitierte so äußerst scharfe Kritik des berühmten Philosophen Schopenhauer gegen die Mathematik, weil sie für die Feindschaft mehr künstlerisch veranlagter Naturen gegen unsere Wissenschaft so überaus charakteristisch ist. Schopenhauer hält die Aufeinanderfolge einzelner logischer Schlüsse, die ein strenger mathematischer Beweis enthalten muß, für ungenügend und unerträglich; er will sofort gewissermaßen mit einem Blicke von der

1.) Leipzig und Berlin 1904. – Heft 3 von F. Klein und E. Riecke, neue Beiträge zur Frage des mathem. und physikal. Unterrichts an höheren Schulen. Leipzig und Berlin 1904.

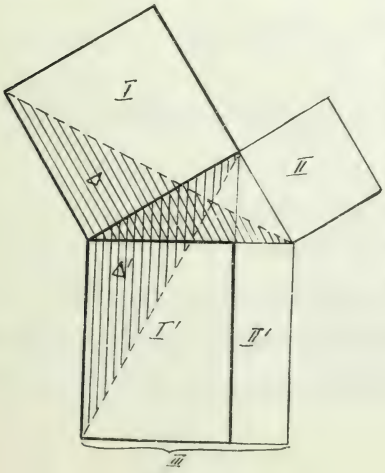
Wahrheit des Satzes intuitiv überzeugt sein, und so hat er sich die Theorie gebildet, es gäbe neben jenen logischen von bestimmten Vordersätzen ausgehenden Deduktionen noch eine andere mathematische Beweismethode, die die mathematische Wahrheit direkt der Anschauung entnimmt. Von diesem Standpunkte verurteilt er in seinem Hauptwerke „die Welt als Wille und Vorstellung" [1] wie auch anderwärts das ganze Euklidische System prinzipiell aufs heftigste und besonders ist Euklids Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes Gegenstand seiner Angriffe; er nennt ihn einen „Mausefallenbeweis", der einen wohl schließlich zum Zugeben der Richtigkeit der Behauptung zwänge - indem er alle möglichen Auswege der Reihe nach listig absperre -, der aber nie zur inneren Erkenntnis der Wahrheit führe. Kein Mathematiker wird Schopenhauer bei diesen Ausführungen beistimmen können, denn mag man der der Anschauung in der Mathematik auch eine noch so große Rolle als heuristisches die Wissenschaft fördernden Prinzip zuschreiben, schließlich wird doch als letzte allein entscheidende Instanz immer wieder der logische Beweis eintreten müssen; ich verweise übrigens gern auf die sehr interessante und amüsant geschriebene akademische Festrede „über Wert und angeblichen Unwert der Mathematik" von A. Pringsheim, [2] in der er

---

1) siehe Werke (herausg. v. Frauenstädt, Leipzig 1859) II, pag. 82 ff und III, pag. 142; ferner auch I, pag. 135.
2) München 1904 = Jahresbericht der deutschen Mathem.-Verein. 13 (1904) pg. 357.

sich ausführlich gerade mit Schopenhauers Angriffen auseinandersetzt.

Freilich, würde Schopenhauer lediglich die zerrissene abgehackte Form der Darstellung bei Euklid angreifen und eine übersichtlichere Herausarbeitung der Ideeen eines jeden Beweisganges sowie überhaupt neben der Logik eine weitergehende Berücksichtigung der Anschauung wünschen, so könnte man ihm durchaus beipflichten. Aber auch dann hätte er sich in dem Euklidischen Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes gerade kein sehr passendes Objekt für seine Angriffe ausgesucht; denn den hatte ich der Idee nach – wenn man von den Äußerlichkeiten der Euklidischen Darstellung absieht – gerade für besonders anschaulich; ich stelle ihn daher gern hier kurz in seinen Hauptzügen in möglichst anschaulicher Form dar.



Wir zeichnen uns die bekannte Figur des rechtwinkligen Dreiecks mit den Quadraten I, II über den Katheten und III über der Hypotenuse; wir ziehen die Höhe des Dreiecks auf die Hypotenuse, deren Verlängerung das Quadrat III in die zwei Rechtecke I' und II' teilt, so daß also

(1) $\quad III = I' + II'.$

Wir zeigen nun, daß das Rechteck $\underline{I}'$ dem Kathetenquadrat $\underline{I}$ gleich ist. Dazu ziehen wir die beiden gestrichelten Hilfslinien und betrachten das schräg schraffierte Dreieck Δ und das vertikale schraffierte Δ'. Das erstere Δ hat offenbar mit dem Quadrate $\underline{I}$ Grundlinie und Höhe gemein, und ist daher bekanntlich halb so groß:

$$\Delta = \tfrac{1}{2}\,\underline{I};$$

ebenso ist das vertikal schraffierte Dreiecke Δ' gleich der Hälfte des Rechteckes $\underline{I}'$:

$$\Delta' = \tfrac{1}{2}\,\underline{I}'.$$

Endlich aber sieht man leicht, daß beide Dreiecke kongruent und also auch gleich sind:

$$\Delta = \Delta',$$

und damit folgt in der Tat

$$\underline{I} = \underline{I}'.$$

Ebenso kann man nachweisen, daß

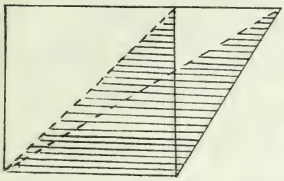
$$\underline{II} = \underline{II}',$$

und in Anbetracht der Tatsache (1) folgt wirklich der pythagoräische Satz:

$$\underline{III} = \underline{I} + \underline{II}.$$

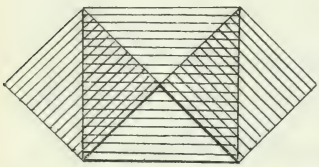
Sie sehen, wie hier ganz kurz in, wie man meinen sollte, jedem Menschen sofort einleuchtender Weise der Beweis geführt ist; dabei sind Anschauung und Logik derart verbunden – und das scheint mir wohl das Ideal,

daß jeder logische Schritt sofort auch zur anschaulicher Evidenz gebracht wird. Auch den Hilfssatz $\Delta = \frac{1}{2} I$, der hier benutzt wird, kann man sich bekanntlich durch die nebenstehende Figur, in der Δ aus der Hälfte des Quadrats I durch Verschiebung der einzelnen Horizontalstreifen hervorgeht, anschaulich vollkommen klar machen (Cavalierisches Prinzip!). Damit freilich diese einfachen Ideen auch richtig und klar herauskommen, dazu trägt eine von dem Euklidischen starren Schema abweichende etwas flüssigere Darstellung und eine angemessene Bezeichnungsweise ihr wesentliches Teil bei; besonders möchte ich dafür plädieren, daß man auch viel allgemeiner im Unterricht zur Unterscheidung von Linien und Flächen verschiedene Schraffierungen oder noch besser – was hier leider nicht angeht – verschiedene Farben verwendet, statt der gräßlichen Euklidischen Art, nur die Ecken mit Buchstaben zu markieren; daß „rote" oder „gelbe" Dreiecke ist ja ungleich augenfälliger, als wenn man sich die Ecken E K L erst in einer komplizierten Figur lange zusammensuchen soll.



So meine ich also, sind Schopenhauers Angriffe gegen den Euklidischen Beweis sachlich durchaus unberechtigt und noch klarer wird das, wenn man sich an-

sieht, wo's er an seine Stelle setzen will. Er gibt da nur für den Spezialfall des rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecks den bekannten Platonischen Beweis, den man ja freilich durch einen Blick auf die nebenstehende Figur übersieht, und beschränkt sich darauf, für den allgemeinen Fall Ähnliches zu fordern. Aber das bietet dann ja gerade der Euklidische Beweis in einer vernünftigen Darstellung; und tatsächlich sind, wenn man der Sache auf den Grund geht, beide Beweise ganz gleichmäßig aus Logik und Anschauung gemischt, nur daß Schopenhauers Fall als der speziellere naturgemäß auch eine etwas einfachere Erledigung gestattet, und daß es demgemäß hier auch für den Ungeübten leichter ist, die in dem Beweise enthaltene Kette logischer Schlüsse mit einem Schlage anschaulich zu erfassen.



Doch nun genug von Schopenhauer; lassen Sie uns jetzt unsere Bemerkungen zur Entwicklung des geometrischen Unterrichts in Deutschland zu Ende bringen. Wir hatten bisher im Grunde immer noch die Entwicklungslinie verfolgt, die auf jene Pestalozzi-Herbartschen zunächst für den Volksschulunterricht bestimmten Tendenzen zurückgeht. Nun wollen wir zusehen, welche Anregungen

denn bei uns in Deutschland von dem mathematischen Hochschulunterricht aus auf den Unterricht an der Schule eingewirkt haben. Da sehen wir ein sehr viel weniger befriedigendes Bild, als in anderen Ländern; gerade in der Geometrie zeigt sich die so oft beklagte Erscheinung, daß Hochschule und „höhere" Schule durchaus in getrennten Bahnen sich bewegten, ohne lebendige Wechselwirkungen aufeinander auszuüben. Ausnahmen bildeten in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts die Vertreter der neueren Geometrie, besonders Möbius und Steiner, deren Werke ich ja in dieser Vorlesung vielfach zitiert habe. Später aber wächst mit dem großen Aufschwung der mathematischen Wissenschaft jene Entfremdung mehr und mehr und erst in dem letzten Jahrzehnt können wir wieder erfreulicher Weise lebhafte Bemühungen feststellen, die Kluft zu überbrücken. Als hervorragendstes Zeugnis dieser Richtung nenne ich Ihnen auch hier gern wieder die Encyklopädie der Elementarmathematik von H. Weber und J. Wellstein, von der für uns hier besonders Band II (Elemente der Geometrie [1]) und Band III (Angewandte Elementarmathematik [2]) in Betracht kommt; in Bd. II finden Sie die Grundlagen der Geometrie (Wellstein), Trigonometrie (Weber und W. Jacobsthal),

---

1) 2. Aufl. Leipzig 1906
2) 2. Aufl. Leipzig 1907

analytische Geometrie (Weber), in Bd. III Vektortheorie und Graphik (Wellstein). Allerdings ist in dieser Enzyklopädie nicht ganz das realisiert, was ich mir für die Schule wünsche, wie ich ja schon früher [1] ausgeführt habe; speziell in den geometrischen Teilen beschränkten sich die Verfasser vielfach darauf, gewisse Dinge, mit denen sie sich besonders beschäftigt haben, in gewiß äußerst interessanter aber recht abstrakter Form zu entwickeln, statt lieber eine allgemeine Orientierung über den Gesamtumfang der Geometrie, soweit sie für den Schulunterricht in Betracht kommt, zu geben. Demgegenüber wissen Sie ja, was ich wiederholt schon als Zielpunkt meiner eigenen Vorlesung bezeichnet habe. Ich wollte einen Gesamtrahmen der Geometrie aufrichten, in dem gleichförmig Platz für alle ihrer Teile ist, und der einen Überblick über sie alle und ihre wechselseitigen Beziehungen gestattet. Freilich konnte ich es nur als Postulat hinstellen, nun gemäß den einzelnen aufgestellten allgemeinen Gesichtspunkten zu prüfen, was daraus für die Schule paßt, und wie weit man überhaupt im Schulbetrieb unseren Ergebnissen gerecht werden kann.

Natürlich ist dies Problem schon vielfach angegriffen, freilich noch niemals gelöst worden, und ich

1) siehe Teil I, pag. 8.

will nicht unterlassen, hier wenigstens noch zwei interessante Bücher zu nennen, die einen grossen Teil der hier in Betracht kommenden Fragen nach einheitlichem Gesichtspunkten verarbeitet haben. Das eine ist der neue österreichische Lehrplan vom 1900 [1], der an den Grundlagen der Exner-Bonitzschen Reform von 1850 festhält. Wie dort wird ein Unter- und Oberbau des Gymnasiums unterschieden (je 4 Jahre), und auf ersterem der geometrische Unterricht ausschliesslich anschaulich mit sehr vielen Zeichenunterricht erteilt; dieser setzt sich auch auf der Oberstufe neben dem dort beginnenden logischen Betriebe fort. Das interessanteste an dem Lehrplan sind seine ausführlichen Erläuterungen zum mathematischen Unterricht, die einen hervorragend sachkundigen Verfasser verraten; es ist mir aber nicht bekannt geworden, von wem sie herrühren. Wir haben hier einen erfreulichen Gegensatz zu den sonstigen offiziellen Lehrplänen, die im mathematischen Teil meist so knapp gehalten sind, dass man kaum etwas Bestimmtes aus ihnen entnehmen kann.

Das zweite Buch, das ich nennen will, ist das Lehrbuch der Elementargeometrie von Henrici und Treutlein [2]. Hier sind die Verfasser erfolgreich bemüht,

1) Lehrplan und Instruktionen für den Unterricht an Gymnasien in Österreich. 2. Aufl. Wien 1900.
2) In 3 Teilen. Leipzig 1882/83. 2. bezw. 2. Aufl. 1897, 1907, 1901.

den Ergebnissen der damaligen neueren Forschung, der projektiven Geometrie, ebenso wie den Anwendungen Rechnung zu tragen, und auch die analytische Geometrie wird in organischer Verbindung mit anderem, namentlich der Trigonometrie gebracht. Im einzelnen erwähne ich, daß die Einteilung des Stoffes nach den Klassen geometrischer Transformationen erfolgt, so wie wir das früher taten und wie das Möbius zuerst in seinem „barycentrischen Kalkül" ausführte: Kongruenz, Aehnlichkeit, Perspektivität. Hinsichtlich der Anwendungen verweise ich darauf, daß sich am Ende des 2. Teiles eine Vermessungskarte des Großherzogtums Baden befindet (Henrici lebt in Heidelberg, Treutlein in Karlsruhe), so daß der Schüler bald ein lebendiges Bild des Zweckes der Trigonometrie bekommt; ich meine, daß durch eine solche lebendige Bezugnahme zur Heimatskunde, die durch wirkliche Vornahme von Vermessungen im Gelände wirksam unterstützt wird, der Unterricht ganz außerordentlich gewinnt. So sollte man analog etwa an unseren Schulen hier die Gaußsche Vermessung des Königreiches Hannover vorlegen, wo dann jeder Schüler wissen würde, was es mit dem berühmten Dreieck Hoher Hagen – Brocken – Inselsberg auf sich hat. – Henrici – Treutlein ist also ein äußerst beachtenswertes

Buch; man mag vom heutigen Standpunkt aus freilich bedauern, daß die über die linearen Transformationen der projektiven Geometrie hinausgehenden allgemeinen Verwandtschaften, wie wir sie früher noch heranzogen, fehlen, und daß im Zusammenhang damit auch die modernen Forderungen des funktionalen Denkens etc. nicht berücksichtigt sind; es fehlt auch ein philosophischer Abschluß (also eine Erörterung über Axiomatik u. dgl.), wie er jetzt vielfach auch für die Oberklassen der Schule gewünscht wird.

Wir stehen nunmehr, meine Herren, am Ende unserer gemeinsamen Betrachtungen; konnte ich Ihnen im letzten Abschnitt auch schon viel davon erzählen, wie sich neues Leben überall jetzt an der Schule regt, so denke ich doch, daß das Problem der Neugestaltung des mathematischen, speziell auch des geometrischen Unterrichts in den nächsten Jahren noch in ungleich höherem Maße in den Mittelpunkt des allgemeinen Interesses rücken wird. Sie alle, meine Herren, sind berufen, an der Lösung dieser so wichtigen Aufgabe nach Kräften mitzuarbeiten — mitzuarbeiten auf Grund selbständigen Nachdenkens über alle einschlägigen Fragen, und frei vom Drucke einer übermächtigen starren Tradition. Sie werden das können, wenn Sie sowohl über alle in Betracht kommenden

dem Gebiete der Wissenschaft, als auch über die geschichtliche Entwicklung einen allseitigen Überblick haben, und dafür – so hoffe ich – soll Ihnen meine Vorlesung eine Grundlage gegeben haben.

Berichtigungen und Nachträge zu Teil I.

Zu Seite 191: Nicolaus Mercator (ca. 1620–1684), von dem die logarithmische Reihe herrührt, ist nicht, wie irrtümlich behauptet, mit Gerhard Mercator (1512–1594), dem Erfinder der Mercatorprojektion (siehe Teil II, S. 213), identisch.

Zu Seite 244: In den 3 ersten Formeln lies n statt n^2 im Nenner.

Zur Lehre vom Logarithmus (S. 319 ff.): „Ähnliche Modifikationen der üblichen Unterrichtsganges werden auch anderwärts empfohlen; so definiert Jules Tannery in seinen „Notions de mathématiques" (Paris 1903) den Logarithmus auch von vornherein durch den Hyperbelinhalt (§ 307, pag. 282 = pag. 265 der soeben erschienenen deutschen Übersetzung von P. Klaess: „Elemente der Mathematik." – Leipzig 1909). – Berücksichtigung der Neper-Bürgischen Definition und Veranschaulichung derselben an konkreten Beispielen empfiehlt beispielsweise H. Koppe („Behandlung der Logarithmen und der Linse im Unterricht". Programm des Andreas Realgymnasiums Berlin 1893)

QA
39
K54
T.2

Klein, Felix
Elementarmathematik vom
höheren Standpunkte aus

Physical &
Applied Sci.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY